Beiträge

zur

Theorie des Wasserschlosses

bei selbsttätig geregelten Turbinenanlagen.

Von der

Kgl. Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften (Doktor-Ingenieurs)

genehmigte

DISSERTATION.

Vorgelegt von

DIETER THOMA

Diplom-Ingenieur und Assistent für technische Mechanik
an der Kgl. Technischen Hochschule zu München.

Referent: Prof. Dr. R. CAMERER.
Korreferent: Prof. Dr. A. FÖPPL.

Druck von R. Oldenbourg in München.
1910.

Beiträge

zur

Theorie des Wasserschlosses

bei selbsttätig geregelten Turbinenanlagen.

Von der

Kgl. Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften (Doktor-Ingenieurs)

genehmigte

DISSERTATION.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Vorgelegt von

DIETER THOMA

Diplom-Ingenieur und Assistent für technische Mechanik
an der Kgl. Technischen Hochschule zu München.

Referent: Prof. Dr. R. CAMERER.
Korreferent: Prof. Dr. A. FÖPPL.

Druck von R. Oldenbourg in München.
1910.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554813_0104

Übersicht über den Inhalt.

1. Einleitung, Problemstellung 1
2. Zulässige und unzulässige Vernachlässigungen 4
3. Aufstellung der Hauptgleichungen 7
4. Integration für unendlich kleine Schwingungen, Stabilitätsbedingung . . 10
5. Andere Herleitung der Stabilitätsbedingung 13
6. Diskussion der Stabilitätsbedingung 18
7. Aperiodische Bewegungsformen 20
8. Zusammenfassung, Beispiele für die charakteristischen Wasserschlofsquerschnitte 24
9. Verfahren zur näherungsweisen Integration der Hauptgleichungen für endliche Ausschläge 29
10. Genauigkeit des Verfahrens und zu erwartende Fehler 34
11. Besprechung ausgerechneter Beispiele 38
12. Verbesserung der Ergebnisse wegen der zeitlichen Verzögerung der Reglerwirkung 44
13. Verbesserung der Ergebnisse wegen der bleibenden Ungleichförmigkeit der Regelung 52
14. Verbesserung der Ergebnisse wegen der Veränderlichkeit des Gesamtwirkungsgrades 56

Zusammenfassung 60

1. Einleitung, Problemstellung.

Wenn die Zuführung des Betriebswassers einer Turbinenanlage durch eine längere geschlossene Leitung erfolgen mufs, wie dies in vielen Fällen durch die örtlichen Verhältnisse notwendig wird, ergeben sich immer Schwierigkeiten, sobald eine selbsttätige Geschwindigkeitsregelung der Turbinen verlangt wird; die bei den Regulierbewegungen auftretenden Druckschwankungen in der geschlossenen Zuleitung bilden in fast allen Fällen nicht nur eine Gefahr für die Leitung, sondern erzeugen auch durch ihre Rückwirkung auf die Kraftleistung der Turbinen eine empfindliche Störung des Reguliervorganges, welche manchmal so weit geht, dafs eine selbsttätige Regelung nicht aufrecht erhalten werden kann.

Man hat durch vielerlei Hilfsmittel versucht, beiden Übelständen abzuhelfen; sog. Freilaufventile bilden einen guten Schutz der Leitung gegen gefährliche Drucksteigerungen, vermögen aber das Auftreten von Druckverminderungen beim Öffnen der Turbinen und ihren schädlichen Einflufs auf den Reguliervorgang nur dann zu beseitigen, wenn sie als »Synchronschieber« ausgeführt werden, also derart, dafs der Wasserverbrauch von Turbine und Freilaufventil zusammen konstant bleibt für alle Eröffnungen der Turbine; in diesem Falle wirken sie aber bei Teilbelastungen der Turbinen als Wasservergeuder. Zur Vermeidung dieser meistens unerwünschten Wasserverschwendung hat man die Freilaufventile auch so gebaut, dafs sie nur bei einer plötzlichen Verminderung des Wasserverbrauches der Turbine geöffnet werden, und nachher, bei weiterhin konstanter Turbinenöffnung, sich von selbst langsam wieder schliefsen; für die Zuleitung gefährliche Drucksteigerungen treten dann nicht auf, und dauernde Wasservergeudung ist vermieden; die bei plötzlichen Vergröfserungen des Wasserverbrauches entstehenden Druckvermin-

rungen mit ihrer Rückwirkung auf den Reguliervorgang bleiben aber bestehen und bedingen zu ihrer Kompensation dieselben Maßnahmen — große Schwungmaßen und hohen Ungleichförmigkeitsgrad der Regelung — welche auch bei Abwesenheit des Freilaufventiles erforderlich wären. Eine nach allen Richtungen hin befriedigende Lösung der Aufgabe ist somit durch die Verwendung von Freilaufventilen allein nicht möglich.

Wenn man eine wirksame Verbesserung der Regelung ohne Wasservergeudung erreichen will, braucht man vielmehr einen Energiespeicher, welcher bei einer Vergrößerung des Wasserverbrauches bei einem mäßigen Druckabfall in der Leitung solange Energie an die Turbinen abgibt, als erforderlich ist, um die lange Wassersäule der Zuleitung zu beschleunigen. Noch bis vor wenigen Jahren hat man als Energiespeicher oft Windkessel benutzt, welche vor dem Einlauf in die Turbine an die Rohrleitung angeschlossen waren; infolge der mit ihnen gemachten schlechten Erfahrungen ist man aber wieder fast ganz von ihrer Verwendung abgekommen; neben anderen Mißständen waren es vor allem die in dem schwingfähigen System Rohrleitung-Windkessel häufig auftretenden heftigen Schwingungen, welche für den Betrieb störend und gefährlich für die Rohrleitung waren. In der neueren Zeit bringt man deswegen in der Regel keine Windkessel an, sondern sucht durch die Verwendung eines Wasserschlosses in der Nähe der Turbinen die Länge der geschlossenen Zuleitung vor denselben möglichst zu verkleinern, wenn die örtlichen Verhältnisse dies irgend gestatten; bei Anlagen mit größeren Gefällen ergibt sich sogar meistens eine für die Verwendung eines Wasserschlosses günstige Gesamtanordnung der Wasserzuführung bereits aus wirtschaftlichen Gesichtspunkten allein, indem es vorteilhaft ist, das Wasser von der Wasserfassung (Wehr, Stausee) an zuerst mit schwachem Gefälle in einer dünnwandigen Rohrleitung oder noch häufiger in einem Stollen bis zu einer Stelle zu führen, von der aus die Weiterführung zum Kraftwerk durch eine möglichst kurze steile Rohrleitung erfolgen kann; der Übergang von dem schwach geneigten Stollen zur steilen Rohrleitung ist dann der gewiesene Platz für ein Wasserschloß. Wenn die freie Wasseroberfläche desselben genügend groß bemessen wird, bleiben die bei plötzlichen Veränderungen des Wasserverbrauches eintretenden Schwankungen der Spiegelhöhe verhältnismäßig klein, und die Regelung der Turbinen arbeitet dann bei plötzlichen Belastungsänderungen unter nahezu denselben Bedingungen, als wenn nur die

kurze Rohrleitung zwischen dem Wasserschlofs und dem Kraftwerk vorhanden wäre.

Bei der Anlage derartiger Wasserschlösser (oder der ihnen gleichwertigen »Entlastungsstollen« oder »Standrohre«) mufs man aber beachten, dafs nunmehr der Stollen (so soll der Kürze halber im folgenden die geschlossene Verbindungsleitung zwischen Wasserfassung und Wasserschlofs bezeichnet werden) und das Wasserschlofs zusammen ein schwingfähiges System bilden, ganz ähnlich wie bei der Anwendung eines Windkessels die Rohrleitung und der Windkessel. Für kleine Gleichgewichtsstörungen ist in der Tat das Wasserschlofs mechanisch einem sehr grofsen Windkessel gleichwertig, und man hat daher zu erwarten, dafs bei ersterem ähnliche Schwingungserscheinungen möglich sind, wie sie bei Windkesseln so oft störend hervorgetreten sind, und die dann gefährlich werden können, wenn sie angefacht[1]) verlaufen. Allerdings sind bei Wasserschlössern grofse Schwingungen aus einem anderen Grunde gefährlich: die Luft, welche bei zu grofser Absenkung des Wasserspiegels im Schlofs in die zu den Turbinen führende Rohrleitung eingesogen wird, erzeugt in ihr, sobald sie in die Turbinen gelangt, aufserordentlich heftige Stöfse, »Wasserschläge«; daneben besteht bei manchen Anlagen noch die Möglichkeit, dafs bei zu grofser Erhebung des Wasserspiegels das Wasserschlofs überläuft und das überlaufende Wasser Zerstörungen anrichtet, wenn beim Bau des Wasserschlosses auf diesen Fall nicht gerechnet wurde.

Weiterhin unterscheiden sich die Vorgänge beim Wasserschlofs von den analogen Vorgängen bei Windkesseln beträchtlich durch die Gröfsenordnung der Geschwindigkeit, mit der sie ablaufen; bei Windkesseln zählt die Schwingungsdauer nach Sekunden, bei Wasserschlössern nach Minuten; eben diese grofse Schwingungsdauer ermöglicht bei letzteren, wie im folgenden zu zeigen sein wird, eine genaue Berechnung des Bewegungsvorganges unter voller Berücksichtigung des Einflufses der Spiegelhöhenänderung auf die Regler.

Störende Schwingungserscheinungen sind in der Tat bei einer mit einem Wasserschlofs ausgerüsteten Anlage aufgetreten und durch eine Veröffentlichung in der Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure[2]) bekannt geworden. Da die Ursache dieser Erschei-

[1]) Als »angefachte« Schwingung soll im Gegensatze zur gedämpften Schwingung eine Schwingung bezeichnet werden, deren Ausschläge mit der Zeit zunehmen.

[2]) Jahrg. 1908. Prof. Dr. Rasch und Dr. Ing. F. Bauwens: Die Kraftübertragungsanlagen der Rurtalsperren-Gesellschaft, Seiten 609—611.

nungen und die Umstände, von denen sie abhängen, noch nicht allgemein klar erkannt worden sind, erschien es mir in Anbetracht der technischen Wichtigkeit dieser Frage wünschenswert, eine eingehendere theoretische Untersuchung des Schwingungsvorganges vorzunehmen, besonders um angeben zu können, unter welchen Bedingungen eine einmal durch eine Belastungsänderung der Turbinen erzeugte Schwingung angefacht verläuft, und um überhaupt über den Bewegungsvorgang allgemeineren Aufschluſs zu erhalten.

2. Zulässige und unzulässige Vernachlässigungen.

Bevor zur Aufstellung der Grundgleichungen des Problems geschritten wird, muſs noch erörtert werden, welche Umstände dabei vernachlässigt werden dürfen, und welche Einflüsse andererseits unbedingt Berücksichtigung erfordern.

Wenn man für die bei praktischen Ausführungen vorkommenden Abmessungen die Werte der Schwingungsdauer für das System Stollen-Wasserschloſs durch Beobachtung oder Rechnung ermittelt, findet man, wie bemerkt, stets verhältnismäſsig groſse Werte, welche meist eine Minute übersteigen; dieser langsame Verlauf ist für die Untersuchung von groſser Wichtigkeit; er ermöglicht eine Reihe von Vernachlässigungen, ohne daſs dadurch das Bild wesentlich getrübt würde. Zunächst brauchen zur Bestimmung der Wassermenge, welche dem Wasserschloſs sekundlich durch die Rohrleitung entnommen wird, die hydrodynamischen Vorgänge, welche sich in dieser infolge der Elastizität der Rohrwandungen und des Wassers abspielen, nicht beachtet zu werden; die Schwingungsdauer für diese Vorgänge beträgt meist weniger als eine Sekunde und kommt gar nicht in Betracht gegenüber den langsamen Veränderungen des Wasserstandes im Wasserschloſs. Aus demselben Grunde kann auch die Elastizität der Stollenwandungen und des im Stollen enthaltenen Wassers vernachlässigt werden. Von besonderer Wichtigkeit für die folgende Untersuchung ist es, daſs auch das zeitliche Zurückbleiben der Regler hinter den Änderungen der Umlaufzahl der Turbinen, welches kurz als Nacheilen bezeichnet werden möge, vernachlässigt werden kann: bei plötzlichen Änderungen der Belastung der Turbinen verändert bekanntlich ein moderner, mit nachgiebiger Rückführung oder mit Gegenbremse ausgerüsteter Turbinenregler zwar sehr schnell die Eröffnung der Turbinen, stellt aber nicht sofort genau die

normale Umlaufzahl wieder her, sondern läfst eine kurze Zeit verstreichen, bevor genau die normale Umlaufzahl und damit genau die dem neuen Widerstandsmomente entsprechende Turbinenleistung erreicht ist, und dasselbe gilt, wenn die Regulierbewegung nicht durch eine Änderung der Belastung, sondern durch eine Änderung des wirksamen Gefälles eingeleitet wird: bei einer Verminderung des Gefälles z. B. wird zuerst die Umlaufzahl etwas sinken und solange das Gefälle abnimmt, stets etwas geringer sein als normal; dementsprechend wird auch die Leistung der Turbine bei abnehmendem Gefälle stets etwas kleiner, bei zunehmendem Gefälle etwas gröfser sein als bei unveränderlichem Gefälle bei derselben Belastung (wobei unter Belastung die Gesamtheit der die Leistung aufbrauchenden Elemente zu verstehen ist). Bei dem langsamen Verlaufe der Schwingungen des Wasserspiegels kann aber diese Abweichung ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden, was am Schlufs dieser Untersuchung noch nachgewiesen werden wird. Vorausgesetzt ist dabei allerdings, dafs der Turbinenregler nicht etwa gerade zur Verminderung der Schwingungen im Wasserschlofs mit einer besonders starken und nachhaltigen Dämpfung ausgestattet wird. Die eben erwähnte Untersuchung wird zeigen, dafs dann die Dämpfung aufserordentlich stark gemacht werden müfste.

Ebenso kann auch das bei schnellen Änderungen des Gefälles eintretende zeitliche Zurückbleiben der Änderung der Umlaufzahl (infolge der Schwungmassen der Turbinen) ohne jeden merklichen Fehler vernachlässigt werden.

Zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen mufs man einen Ausdruck für die dem Wasserschlofs durch die Rohrleitung sekundlich entnommene Wassermenge aufstellen, und die eben erwähnten Vernachlässigungen ermöglichen dies, wenn die von den Turbinen abzugebende Leistung, der Wirkungsgrad der Turbinen und ferner das an ihnen wirksame Gefälle bekannt sind. Das letztere ergibt sich aus den Reibungsverlusten in der Rohrleitung und aus dem Gefälle H zwischen Wasserschlofs und Unterwasser. Die Veränderlichkeit dieses Reibungsverlustes soll für die folgende Untersuchung vorerst vernachlässigt werden, ebenso wie auch die Veränderlichkeit des Turbinenwirkungsgrades für verschiedene Beaufschlagungen und Gefälle; diese beiden Vernachlässigungen heben sich meist teilweise auf; sie werden später noch berücksichtigt werden.

Ferner brauchen die Vertikalbeschleunigungen der im Wasserschlofs enthaltenen Wassermenge und die Trägheitswirkung der in

der Rohrleitung befindlichen Wassersäule nicht beachtet zu werden; beide Wirkungen sind wegen der im Verhältnis zur Stollenlänge geringen Länge der Rohrleitung und der kleinen Höhe des Wasserschlosses unbedeutend; ihr Einfluſs auf die Regler muſs durch die bekannten Mittel kompensiert werden.

Zur Berechnung von H wird der Unterwasserspiegel als unveränderlich angenommen, ebenso wie der Wasserspiegel des Stausees, was fast immer sehr genau zutrifft; die Veränderungen des Wasserspiegels im Wasserschloſs dürfen dagegen nicht vernachlässigt werden, weil damit auch die Rückwirkungen dieser Spiegelhöhenänderungen auf die Turbinenregler nicht in die Rechnung eingeführt werden würden. Wenn es sich allerdings nur um die Aufgabe handelt, den nach einer Belastungsänderung der Turbinen eintretenden ersten gröſsten Ausschlag des Wasserspiegels annähernd zu ermitteln, ist es nicht immer notwendig, diese Rückwirkung zu beachten, und es genügt dann, die von den Turbinen sekundlich verbrauchte Wassermenge aus dem für den betreffenden Beharrungszustand gültigen Gefälle zu ermittteln und als gegeben in die Rechnung einzuführen; die Aufgabe gestattet dann einfache und elegante Lösungen, welche von Prásil, Lorenz und Pressel angegeben worden sind[1]). Wenn man aber nach dem weiteren Verlaufe der Bewegung fragt, und besonders wenn man untersuchen will, wann eine angefachte Schwingung auftritt, ist es unbedingt notwendig, die Rückwirkung zu beachten, welche sich darin äuſsert, daſs bei tiefem Wasserstande im Schloſs die Turbinen etwas mehr Wasser brauchen als bei hohem Wasserstande, wenn sie dieselbe Leistung abgeben sollen; denn dieser Umstand gerade bewirkt das Anwachsen der Schwingungen. Am besten wird dieser Forderung dadurch genügt, daſs man, wie es auch den tatsächlichen Verhältnissen entspricht, nicht den Wasserverbrauch, sondern die Leistung der Turbinen als gegeben ansieht, und als unabhängige Veränderliche in den Ansatz einführt, indem man setzt:

$$\text{Wasserverbrauch} = \text{Const.} \frac{\text{Turbinenleistung}}{\text{Gefälle Wasserschloſs-Unterwasser}}$$

[1]) Prof. Dr. F. Prásil, »Wasserschlofsprobleme«, Schweizerische Bauzeitung Band 52, Nr. 21 u. ff., Zürich.

Prof. Dr. H. Lorenz, »Schwingungen in Flüssigkeitsleitungen und ihr Einfluſs auf den Gang von Kreiselrädern«, Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen, Heft 28, 1908.

Prof. Dr. K. Pressel, »Beitrag zur Bemessung des Inhaltes von Wasserschlössern«, Schweizerische Bauzeitung 1909, Seite 57 ff.

Durch diese Einführung wird auch der allgemeine Charakter der vorliegenden Untersuchung bestimmt; sie führt auf eine Differentialgleichung, die so verwickelt ist, dafs eine allgemeine Integration nicht möglich ist. Es wird daher die Differentialgleichung für den wichtigsten Fall, dafs die Turbinenleistung konstant gehalten wird, für kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage integriert werden; auf Grund dieses Integrals kann dann die Beziehung zwischen den Konstanten des Systems ermittelt werden, welche erfüllt sein mufs, damit die Schwingungen gedämpft verlaufen. Ferner sollen die Fälle untersucht werden, in denen der Bewegungsvorgang aperiodisch verläuft. Um den Nachweis zu erbringen, dafs die für unendlich kleine Störungen des Beharrungszustandes ermittelten Beziehungen

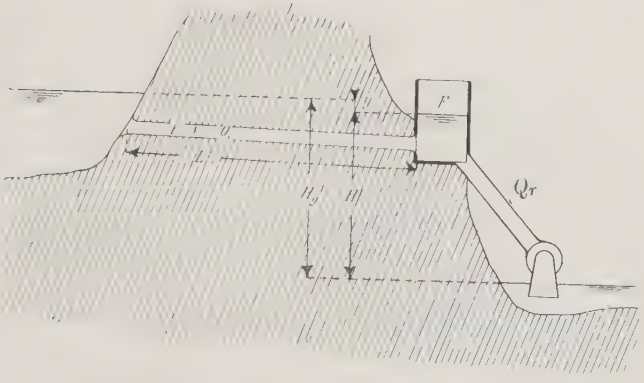

Fig. 1.

annähernd auch für endliche Störungen gelten, soll schliefslich die Integration für bestimmte Zahlenbeispiele näherungsweise durchgeführt werden; dabei wird eine für die näherungsweise Integration von Differentialgleichungen dieser Art besonders bequeme Methode dargelegt werden, welche die auftretenden Wasserspiegelschwankungen auch für den Fall zu ermitteln gestattet, dafs die Leistung der Turbinenanlage eine beliebig gegebene zeitliche Veränderung aufweist.

---

3. Aufstellung der Hauptgleichungen.

Es seien folgende Bezeichnungen eingeführt (vgl. Fig. 1):

H_g Gesamtgefälle in m,

H Nettogefälle zwischen Wasserschlofs und Unterwasser in m,

H_n Nettogefälle zwischen Wasserschlofs und Unterwasser für den Beharrungszustand in m,

y Höhendifferenz zwischen den Wasserspiegeln im Stausee und im Wasserschlofs (positiv, wenn letzterer tiefer ist als der Seespiegel) in m,

$r = H_g - H_n$ Höhendifferenz zwischen den Wasserspiegeln im Stausee und Wasserschlofs für den Beharrungszustand in m,

$s = y - r$ Abweichung des augenblicklichen Wasserstandes im Wasserschlofs von dem im Beharrungszustande vorhandenen Wasserstande.

L Länge des Stollens in m,

f Querschnitt des Stollens in qm,

v Wassergeschwindigkeit im Stollen in m/sec,

Q_s Durch den Stollen fliefsende Wassermenge in m^3/sec,

k Ein Koeffizient, der mit v^2 multipliziert den Druckhöhenverlust durch den Stollen ergibt,

F Wasserschlofsquerschnitt in der Höhe des Wasserspiegels in qm,

Q_r Durch die Rohrleitung fliefsende Wassermenge in m^3/sec,

N Leistung der Turbinen in PS,

$A = Q_r \cdot H$ in mt/sec,

η Gesamtwirkungsgrad von Turbine und Rohrleitung,

t Zeit in Sekunden.

Nach den Erörterungen im vorigen Abschnitte ist zu setzen

$$Q_r = \frac{N}{H} \frac{0{,}75}{10\,\eta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Zur weiteren Ausrechnung ist es zweckmäfsig, für den stets wiederkehrenden Wert $\frac{N \cdot 0{,}75}{10\,\eta}$ eine besondere Bezeichnung einzuführen; man setzt

$$\frac{N \cdot 0{,}75}{10\,\eta} = A \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

womit Gleichung 1) übergeht in

$$Q_r = \frac{A}{H} = \frac{A}{H_g - y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

Die dynamische Grundgleichung, auf die Wassersäule im Stollen angewendet, ergibt ferner bei Berücksichtigung der Reibung

$$\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} = y - k v^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Aus der Betrachtung der in das Wasserschlofs ein- und der aus ihm austretenden Wassermengen erhält man weiterhin

$$F\frac{dy}{dt} = Q_r - fv \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

In diese Gleichung setzt man den Wert von Q_r aus Gleichung 3) ein und erhält

$$F\frac{dy}{dt} = \frac{A}{H_g - y} - fv \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Diese Gleichung und die Gleichung 4)

$$\frac{L}{g}\frac{dv}{dt} = y - kv^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

sind die Hauptgleichungen des vorliegenden Problems, sie bilden ein simultanes System, durch dessen Integration y und v als Funktionen der Zeit t ermittelt werden könnten. Im allgemeinen ist dabei F von y und A von t abhängig, und wenn man eine der beiden abhängigen Veränderlichen y und v eliminieren will, mufs man die Art der Veränderlichkeit kennen. Die Rechnung soll im folgenden für den einfachsten und zugleich wichtigsten Fall durchgeführt werden, dafs F und A konstant sind, d. h. dafs das Wasserschlofs überall gleichen Querschnitt besitzt und die Turbinenleistung unverändert bleibt. Da praktisch vor allem der Verlauf der Spiegelabsenkung von Interesse ist, eliminiert man zweckmäfsigerweise aus den beiden Gleichungen v und $\frac{dv}{dt}$. Die Gleichung 6), nach t differenziert, gibt

$$F\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{A}{(H_g - y)^2}\frac{dy}{dt} - f\frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

In diese Gleichung setzt man den Wert von $\frac{dv}{dt}$ aus Gleichung 4) ein und erhält

$$F\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{A}{(H_g - y)^2}\frac{dy}{dt} - f\frac{g}{L}(y - kv^2).$$

Schliefslich hat man noch v^2 mit Hilfe der nach v aufgelösten Gleichung 6) einzusetzen, worauf sich ergibt

$$F\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{A}{(H_g - y)^2}\frac{dy}{dt} - \frac{fg}{L}\left(y - \frac{k}{f^2}\left[\frac{A}{H_g - y} - F\frac{dy}{dt}\right]^2\right) \quad 8)$$

Wenn man die Rechnung ausführt und zur Abkürzung konstante Koeffizienten α, β, γ usw. einführt, erhält man schliefslich folgende Differentialgleichung für y

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\frac{d^2y}{dt^2}+\beta\frac{d^2y}{dt^2}\cdot y+\gamma\frac{d^2y}{dt^2}y^2+\delta\frac{dy}{dt}+\varepsilon y+\zeta y^2+\eta y^3\\ &+\vartheta+\varkappa y\frac{dy}{dt}+\lambda\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\mu\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 y+\nu\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 y^2=0 \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

Diese Koeffizienten α, β, γ usw. haben dabei folgende Werte:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= FH_g^2 & \eta &= \frac{fg}{L}\\ \beta &= -2FH_g & \vartheta &= -\frac{gkA^2}{fL}\\ \gamma &= F & \varkappa &= -\frac{2gkAF}{fL}\\ \delta &= -A+\frac{2gkAFH_g}{fL} & \lambda &= -\frac{gkF^2}{fL}\\ \varepsilon &= -\frac{fgH_g^2}{L} & \mu &= -\frac{2gkF^2H_g}{fL}\\ \zeta &= -\frac{2fgH_g}{L} & \nu &= -\frac{gkF^2}{fL} \end{aligned}\right\} \quad 10)$$

4. Integration für unendlich kleine Schwingungen, Stabilitätsbedingung.

Die allgemeine Integration der Differentialgleichung 9) ist nicht möglich; sie soll daher für den besonderen Fall integriert werden, dafs y immer nur sehr wenig von einem mittleren Werte abweicht, d. h. also für den Fall, dafs eine kleine Schwingungsbewegung um eine Gleichgewichtslage herum vorliegt. Man setzt dazu y gleich einem konstanten Mittelwerte r plus einer geringen veränderlichen Abweichung s; man kann dann s^2 und ebenso alle Produkte $s\frac{ds}{dt}$, $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ usw. vernachlässigen und somit in die Gleichung 9) setzen

$$\begin{aligned} y &= r+s & y^2 &= r^2+2rs\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2s}{dt^2} & y^3 &= r^3+3r^2s\\ \frac{d^2y}{dt^2}\cdot y &= r\frac{d^2s}{dt^2} & y\frac{dy}{dt} &= r\frac{ds}{dt}\\ \frac{d^2y}{dt^2}\cdot y^2 &= r^2\frac{d^2s}{dt^2} & \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 0.\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

Man erhält dadurch folgende Differentialgleichung für s:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2s}{dt^2}(\alpha+\beta r+\gamma r^2)+\frac{ds}{dt}(\delta+\varkappa r)+s(\varepsilon+2\zeta r+3\eta r^2)\\ +(\varepsilon r+\zeta r^2+\eta r^3+\vartheta)=0\end{aligned}\right\} 11)$$

Wenn man die anfangs gemachte Voraussetzung, dafs der Wasserschlofsquerschnitt in jeder Höhe derselbe sei, fallen läfst, erhält man für unendlich kleine Schwingungen ebenfalls diese Gleichung, weil der Ausdruck $\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt}$ nur in Verbindung mit anderen, ebenfalls von erster Ordnung kleinen Gliedern auftritt und deswegen herausfällt. Alle auf unendliche kleine Schwingungen bezüglichen Gleichungen gelten daher auch für den allgemeineren Fall, dafs der Wasserschlofsquerschnitt in verschiedenen Höhen verschieden grofs ist.

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (Gleichung 11) enthält unter ihren Integralen auch die Gleichung für gedämpfte und angefachte Schwingungen. Bevor auf die weitere Untersuchung der Differentialgleichung eingegangen wird, möge noch eine Bemerkung über ihr konstantes Glied gemacht werden: Man kann zeigen, dafs es stets zu Null wird, wenn das bisher noch nicht näher bestimmte r gleich der Wasserspiegelsenkung für den zu der Leistung N (entsprechend der Konstanten A) gehörigen Beharrungszustand gewählt ist; denn der Ausdruck $\varepsilon r+\zeta r^2+\eta r^3+\vartheta$ gleich Null gesetzt und als Gleichung für r aufgefafst, müfste gerade zur Bestimmung der Spiegelabsenkung für den Beharrungszustand dienen, wie man sofort erkennt, wenn man die Werte der Koeffizienten ε, ζ, η und ϑ aus den Gleichungen 10) einsetzt. Wir wollen diese Wahl von r für das Folgende stets voraussetzen; der Wert s gibt dann in übersichtlicher Weise die Abweichung des augenblicklichen Wasserstandes von dem Wasserstande für den Beharrungszustand an.

Wenn man die Gleichung 11) durch den Koeffizienten von $\frac{d^2s}{dt^2}$ dividiert und das eben Gesagte beachtet, erhält man

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\delta+\varkappa r}{\alpha+\beta r+\gamma r^2}\frac{ds}{dt}+\frac{\varepsilon+2\zeta r+3\eta r^2}{\alpha+\beta r+\gamma r^2}s=0 \quad . \quad 12)$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung lautet bekanntlich

$$s=C_1e^{w_1t}+C_2e^{w_2t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

wobei C_1 und C_2 willkürliche Integrationskonstanten und w_1 und w_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$w^2 + \frac{\delta + \varkappa r}{\alpha + \beta r + \gamma r^2} w + \frac{\varepsilon + 2\zeta r + 3\eta r^2}{\alpha + \beta r + \gamma r^2} = 0 \quad . \quad 14)$$

sind.

Eine Schwingungsbewegung liegt dann vor, wenn die Wurzeln dieser Gleichung komplex sind, was für die bei Ausführungen vorkommenden Werte der Konstanten in der Regel zutrifft; in diesem Falle (die andere Möglichkeit wird später noch untersucht werden) hängt dann, wie man auf Grund der bekannten Eigenschaften der Differentialgleichung 12) sofort angeben kann, die Art der Bewegung von dem Vorzeichen des Koeffizienten von $\frac{ds}{dt}$ ab, und zwar liegt bei positivem Vorzeichen eine gedämpfte, bei negativem eine angefachte Schwingung vor.

Um über das Vorzeichen dieses Koeffizienten zu entscheiden, mufs jetzt vorausgesetzt werden, dafs r, der Reibungsverlust im Stollen für den betreffenden Beharrungszustand, stets kleiner als $\frac{1}{3} H_g$ ist; aus einem später zu erörternden Grunde ist dies bei praktischen Ausführungen stets der Fall. Dann ist der Nenner des Koeffizienten stets positiv, wie sich leicht ergibt, wenn man die Werte der Konstanten α, β und γ aus den Gleichungen 10) einsetzt. Daher stimmt das Vorzeichen des Koeffizienten stets überein mit dem Vorzeichen des Zählers.

Um den Grenzfall zwischen gedämpften und angefachten Schwingungen zu ermitteln, hat man also den Zähler gleich Null zu setzen:

$$\delta + \varkappa r = 0.$$

Durch Einsetzen der Werte von δ und $\varkappa$ aus den Gleichungen 10) ergibt sich daraus:

$$\frac{2\,g\,k\,F}{L\,f}\,(H_g - r) = 1.$$

$H_g - r$ ist aber das Gefälle für den Beharrungszustand, für welches man H_n schreiben kann, so dafs man schliefslich als Bedingung für das Eintreten des Grenzfalles erhält

$$\frac{2\,g\,k\,F}{L\,f}\,H_n = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

k war dabei ein Koeffizient, welcher, mit dem Quadrate der Wassergeschwindigkeit im Stollen multipliziert, den Reibungsverlust auf dem Wege vom Stausee bis zum Wasserschlofs ergibt, und der aufser der

Reibung an den Stollenwandungen auch einen etwaigen Rechenverlust, den Austrittsverlust beim Austritt in das Wasserschlofs und ähnliche Widerstände umfafst. In vielen Fällen treten aber diese Verluste sehr zurück gegenüber der Reibung an den Stollenwandungen, und man kann dann für einen kreisförmigen Stollenquerschnitt vom Durchmesser d der Gleichung 15) noch eine einfachere Gestalt geben, indem man k aus der bekannten Formel für den Druckhöhenverlust h_w

$$h_w = \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \lambda$$

ermittelt, in der λ von der Rauhigkeit der Stollenwandungen abhängt. Man erhält dann aus der Gleichung 15) nach einigen Umformungen das einfache Ergebnis

$$\frac{F H_n \lambda}{d^3} = \frac{\pi}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

als Bedingung für das Eintreten des Grenzfalles.

Ebenso ergibt sich, dafs $\delta + \varkappa r$ positiv ist, d. h. dafs die Schwingungen gedämpft sind, wenn

$$\frac{2 g k F H_n}{L f} > 1 \quad \ldots \ldots \quad 17)$$

oder, entsprechend Gleichung 16), wenn

$$\frac{F H_n \lambda}{d^3} > \frac{\pi}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 18)$$

ist.

---

5. Andere Herleitung der Stabilitätsbedingung.

Obwohl die im vorigen Abschnitte gegebene Herleitung der Stabilitätsbedingung unter den ausgesprochenen Voraussetzungen mathematisch streng richtig ist, gestattet sie doch keinen bequemen Einblick in die Ursachen der Schwingungserscheinung; mir scheint deshalb die folgende, allerdings weniger strenge Herleitung der Stabilitätsbedingung, welche aber die auf den Verlauf der Erscheinung einwirkenden Faktoren leicht zu überblicken gestattet, für den Ingenieur von ebensogrofsem Werte zu sein.

Man denke sich die Aufgabe gewissermafsen in zwei Teile zerspalten und betrachte zunächst unter genauer Berücksichtigung der Reibung im Stollen den Vorgang, der sich abspielt, wenn die dem Wasserschlofs sekundlich entnommene Wassermenge, Q_r, konstant

gehalten wird, und untersuche später, ebenfalls für eine kleine Gleichgewichtsstörung, den Vorgang für den Fall, dafs der Reibungsverlust im Stollen konstant, die dem Wasserschlofs sekundlich entnommene Wassermenge aber umgekehrt proportional dem jeweiligen Nettogefälle ist, entsprechend den Gleichungen 1) und 3).

Die Darstellung des Vorganges für konstante Wasserentnahme Q_r ist sehr einfach. Man setze, wie früher, die Spiegelabsenkung im Wasserschlofs y gleich dem konstanten Mittelwerte r plus einer kleinen veränderlichen Abweichung s; ebenso setzt man die Wassergeschwindigkeit im Stollen v gleich einem konstanten Mittelwerte v_m plus einer kleinen veränderlichen Abweichung v_1, also

$$y = r + s$$
$$v = v_m + v_1.$$

Diese Werte führt man in die Gleichungen 4) und 6) ein und erhält

$$\frac{L}{g}\frac{dv_1}{dt} = r + s - k\,(v_m + v_1)^2$$
$$F\frac{dy}{dt} = Q_r - f\,(v_m + v_1).$$

In der ersten dieser beiden Gleichungen hebt sich r, der mittlere Reibungsverlust im Stollen, gegen $k\,v_m^2$ fort; v_1^2 ist klein von zweiter Ordnung und kann vernachlässigt werden; man erhält daher aus der ersten Gleichung

$$\frac{L}{g}\frac{dv_1}{dt} = s - 2\,k\,v_m\,v_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Ähnlich hat man bei der zweiten Gleichung zu beachten, dafs der mittlere Wasserzufluſs $f\,v_m$ gleich dem konstanten Abfluſs Q_r sein mufs; man erhält dann

$$F\frac{ds}{dt} = -f\,v_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20)$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann v_1 und $\frac{dv_1}{dt}$ eliminiert werden. Dazu differenziere man Gleichung 20) nach t:

$$F\frac{d^2s}{dt^2} = -f\frac{dv_1}{dt}$$

In diese Gleichung setzt man den aus der Gleichung 19) zu entnehmenden Wert von $\frac{dv_1}{dt}$ ein und erhält

$$F\frac{d^2s}{dt^2} = -f\frac{g}{L}\,(s - 2\,k\,v_1\,v_m).$$

In diese Gleichung setzt man noch v_1 aus Gleichung 20) ein:

$$F \frac{d^2s}{dt^2} = - \frac{f g}{L} \left(s + 2 k v_m \frac{F}{f} \frac{ds}{dt} \right).$$

Indem man diese Gleichung durch F dividiert und ordnet, ergibt sich

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2 g k v_m}{L} \frac{ds}{dt} + \frac{f g}{F L} s = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 21)$$

Das Integral dieser Differentialgleichung lautet bekanntlich

$$s = e^{pt} (C_1 \sin q t + C_2 \cos q t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

wobei

$$p = - \frac{g k v_m}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23)$$

und

$$q = \sqrt{\frac{f g}{F L} - \frac{g^2 k^2 v_m^2}{L^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24)$$

zu setzen ist. Da die in dem Ausdrucke für p vorkommenden Konstanten ihrem Wesen nach positiv sind, ist p immer negativ; die Schwingungen sind also bei konstanter Wasserentnahme immer gedämpft.

Nunmehr soll der Bewegungsvorgang für den Fall betrachtet werden, dafs die Wasserentnahme umgekehrt proportional dem Gefälle zwischen Wasserschlofs und Unterwasser ist, während der Reibungsverlust im Stollen als konstant angesehen wird. Wenn dieser mit r bezeichnet wird, ist für den Beharrungszustand das Gefälle gleich $H_g - r$ oder gleich H_n. Bezeichnet man ferner, wie früher, die dem Wasserschlofs entzogene Leistung in mt/sec mit A, so ist für den Beharrungszustand

$$Q_r = \frac{A}{H_n}.$$

Es werde nun angenommen, dafs der Beharrungszustand um ein Weniges gestört wird, und dafs der Wasserspiegel im Wasserschlofs eine Sinusschwingung von der kleinen Amplitude a mit der durch Gleichung 24) definierten Periode $\frac{2\pi}{q}$ ausführt. Das wirksame Gefälle kann dann dargestellt werden als

$$H = H_n + a \cos q t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25)$$

Nachdem die Schwingungsbewegung erregt ist, möge nun die Belastung der Turbinen derart eingestellt werden, dafs derselbe mittlere Wasserverbrauch wieder erreicht wird, der vorher beim Beharrungszustande vorhanden war; die neue Leistung, welche dazu dem Wasserschlofs entnommen werden mufs, sei mit A_1 bezeichnet; die Wassermenge Q_r zur Zeit t ist dann

$$Q_r = \frac{A_1}{H} = \frac{A_1}{H_n + a \cos q t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26)$$

und die Bedingung, nach der A_1 bestimmt werden mufs, ist die, dafs der Mittelwert des neuen Q_r gleich dem Q_r beim früheren Beharrungszustande ist, d. h. dafs

$$\text{Mittelwert von } \frac{A_1}{H_n + a \cos q t} = \frac{A}{H_n}, \text{ oder}$$

$$\frac{q}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{q}} \frac{A_1}{H_n + a \cos q t} \, d t = \frac{A}{H_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 27)$$

Durch Ausführung der Integration findet man

$$A_1 = A \frac{\sqrt{H_n^2 - a^2}}{H_n}$$

und unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $\frac{a}{H_n}$ erhält man

$$A_1 = A \left(1 - \frac{a^2}{2 H_n^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 28)$$

Man betrachte nun die Energie, welche dem Wasserschlofs zugeführt und die Energie, die ihm entzogen wird. Die dem Wasserschlofs im Mittel über eine Periode zugeführte Energie ist ebensogrofs wie beim Beharrungszustande, da der Reibungsverlust im Stollen als unveränderlich und zwar als gleich dem Reibungsverluste im Beharrungszustande vorausgesetzt wurde, und da aufserdem die während einer Periode zufliefsende Wassermenge dieselbe ist wie beim Beharrungszustande; die zugeführte Energie ist also gleich A mt/sec (Gleichung 3). Die dem Wasserschlofs entnommene Energie ist aber kleiner und zwar nur gleich $A_1 = A \left(1 - \frac{a^2}{2 H_n^2}\right)$. Im Mittel über eine Periode bleibt also ein Energiebetrag von $A - A_1 = A \frac{a^2}{2 H_n^2}$ im Wasserschlofs zurück. Die zurückbleibende Energie tritt als Schwingungsenergie des Systems Stollen-Wasserschlofs auf.

Um zu ermitteln, wie schnell infolgedessen die Ausschläge der Wasserspiegelschwingungen zunehmen, mufs man beachten, dafs wegen des als unveränderlich vorausgesetzten Druckverlustes im Stollen die Phase der Wassergeschwindigkeit im Stollen um 90^0 gegen die Phase der Spiegelschwankungen verschoben ist, und dafs daher die Wassergeschwindigkeit im Stollen gerade ihren mittleren Wert aufweist, wenn die Spiegelschwankung ein Maximum oder Minimum erreicht hat. Die Schwingungsenergie E z. B. für den

Augenblick des höchsten Wasserstandes ist daher gleich dem Gewichte der über das Normalniveau erhobenen Wassermenge, multipliziert mit dem Abstande ihres Schwerpunktes vom Normalniveau, oder

$$E = F\,a\,\frac{a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 29)$$

worin a den Ausschlag des Wasserspiegels bedeutet (Gleichung 25). Gleichung 28) besagt, dafs im Mittel über eine Periode

$$\frac{dE}{dt} = A\,\frac{a^2}{2\,H_n^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 30)$$

sein mufs. Aus der Gleichung 29) ergibt sich der Wert von $\frac{dE}{dt}$ zu

$$\frac{dE}{dt} = F\,a\,\frac{da}{dt}$$

Durch Vergleichung dieser Gleichung mit Gleichung 30) erhält man

$$A\,\frac{a^2}{2\,H_n^2} = F\,a\,\frac{da}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

und durch Integration

$$a = e^{\frac{A}{2\,F\,H_n^2}t} \cdot a_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 32)$$

Der im Exponenten vor t stehende Koeffizient ist immer positiv, und man ersieht daher aus dieser Gleichung, dafs die Schwingungen immer zunehmen, wenn die Reibung im Stollen konstant oder überhaupt vernachlässigbar klein ist.

Wir haben jetzt zwei Fälle untersucht, wobei für den ersten die Veränderlichkeit der Wasserentnahme, für den zweiten die Veränderlichkeit der Reibung im Stollen vernachlässigt wurden. Aufser diesen beiden in je einer besonderen Untersuchung beachteten Ursachen gibt es keine anderen für eine Dämpfung oder Anfachung der Schwingungsbewegung. Für die hier stets vorausgesetzten kleinen Schwingungen darf man daher annehmen, dafs sich im wirklichen Vorgange beide Einflüsse ohne Störung superponieren; man kann also sagen, dafs die Schwingungen dann gerade weder zu- noch abnehmen, wenn der dämpfende Einflufs der Reibung ebensogrofs ist wie der schwingungserregende Einflufs der wechselnden Wasserentnahme; dieser Einflufs wird angegeben durch die Koeffizienten, die in den Gleichungen 22) und 32) im Exponenten von e vor t stehen. Um den Grenzfall zu ermitteln, setzt man also

$$p + \frac{A}{2\,F\,H_n^2} = 0$$

oder nach Einsetzung des Wertes von p aus Gleichung 23)

$$-\frac{g k v_m^2}{L} + \frac{A}{2 F H_n^2} = 0.$$

Wenn man noch berücksichtigt, dafs $v_m = \frac{Q_{rm}}{f} = \frac{A}{H_n f}$ ist, erhält man hieraus die früher auf strengerem Wege gefundene Bedingung für den Grenzfall:

$$\frac{2 g k F H_n}{L f} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

Ebenso findet man, indem man $p + \frac{A}{2 F H_n^2} < 0$ setzt, wie früher als Bedingung dafür, dafs die Schwingungen gedämpft sind

$$\frac{2 g k F H_n}{L f} > 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

oder

$$\frac{F H_n \lambda}{d^3} > \frac{\pi}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$

---

6. Diskussion der Stabilitätsbedingung.

Die gefundene Stabilitätsbedingung (Gleichung 17) zeigt, dafs das Auftreten angefachter Schwingungen nur insoferne am ehesten bei grofsen Belastungen des Werkes zu befürchten ist, als dabei das Nettogefälle für den Beharrungszustand, H_n, am kleinsten ausfällt; für den öfters zutreffenden Fall, dafs auch bei gröfster Belastung des Werkes der Druckhöhenverlust durch die Reibung im Stollen im Vergleiche zu dem Gesamtgefälle gering ist, ergibt sich aus ihr das wichtige Resultat, dafs die Gefahr für das Auftreten angefachter Schwingungen für alle Belastungen nahezu gleich ist.

Die Ungleichungen 17) und 18) können, wenn es sich um eine neu zu erbauende Anlage handelt, in der Regel als eine Bedingung für den kleinsten zulässigen Wasserschlofsquerschnitt angesehen werden, denn die Länge des Stollens wird durch die Geländeverhältnisse bestimmt und die Bemessung seines Querschnittes wird meist vorwiegend auf Grund wirtschaftlicher Erwägungen, mit Rücksicht auf den Wert der durch die Reibung verloren gehenden Energie erfolgen müssen; den Rauhigkeitsgrad der Stollenwandungen wird man aus demselben Grunde stets so klein als möglich machen; ebenso ist das Gefälle gegeben, so dafs als Gröfse, die variiert werden kann,

nur der Wasserschlofsquerschnitt F verbleibt. Natürlich wird man verlangen, dafs zur Sicherheit F noch gröfser gemacht wird, als es zur Erfüllung der Stabilitätsbedingung unbedingt sein müfste.

Es mufs hier hinzugefügt werden, dafs man auch, wenn die Stabilitätsbedingung nicht erfüllt ist, durch besondere Freilaufventile, welche von den Turbinenreglern oder von einem im Wasserschlofs angebrachten Schwimmer oder ähnlichen Vorrichtungen oder schliefslich von Hand gesteuert werden, eine Dämpfung der Schwingungen erzielen oder wenigstens verhüten kann, dafs die Schwingungen eine gefährliche Gröfse erreichen. Bei der bereits eingangs erwähnten Anlage ist dieser Weg mit Erfolg beschritten worden.

Die im vorigen Abschnitte angestellte Betrachtung gestattet es auch noch leicht anzugeben, wie man ein von Hand betätigtes Freilaufventil handhaben mufs, um die Schwingungen, welche sich bei nicht erfüllter Stabilitätsbedingung einstellen, möglichst schnell zum Verschwinden zu bringen: man mufs dem Wasserschlofs möglichst viel Energie entziehen und ihm dabei auch möglichst wenig Wasser entnehmen, damit ihm durch das Nachfliefsen des Wassers aus dem Stausee möglichst wenig neue Energie zugeführt wird. Die wirksamste Dämpfung wird somit dadurch erzielt, dafs das Freilaufventil offen gehalten wird solange der Wasserspiegel im Wasserschlofs höher ist als der mittlere Wasserstand. Das Wasser, welches durch das Freilaufventil strömt, solange der Wasserstand nur wenig höher als der mittlere ist, trägt dabei allerdings zur Dämpfung nur wenig bei, und wenn man Wasser sparen will, ist es daher geraten, das Freilaufventil erst dann zu öffnen, wenn der Wasserspiegel sich um einen gewissen Betrag über den mittleren Stand erhoben hat, und es schon wieder zu schliefsen, wenn der sinkende Wasserspiegel noch um diesen Betrag höher ist als der mittlere Wasserstand.

Für ein neu zu errichtendes Kraftwerk wird man aber womöglich derartige Vorrichtungen, welche, ganz abgesehen von den Wasserverlusten, eine unerwünschte Komplikation der Anlage und des Betriebes bedeuten, vermeiden und genügend grofs bemessene Wasserschlösser verwenden.

Ebenso können in besonderen Fällen die Ausschläge der Schwingungen auch dadurch auf ein unschädliches Mafs herabgedrückt werden, dafs am Wasserschlofs, etwa in der Höhe des höchsten Wasserstandes im Stausee, ein Überfall angebracht wird, welcher jedesmal, wenn der Wasserspiegel im Schlofs über diese Höhe steigt,

Wasser austreten läfst; man könnte bereits durch Überfälle von verhältnismäfsig geringer Breite eine genügende Dämpfung der Schwingungen erzielen; leider verbietet sich aber dieser Ausweg, wenn der Wasserstand im Stausee stark wechselt, was in den meisten Fällen zutrifft; man müfste dann die Höhe der Überfallkante veränderlich machen und dem jeweiligen Wasserstand im Stausee entsprechend einstellen. Dies aber würde einen unverhältnismäfsig grofsen konstruktiven Aufwand erfordern und den Betrieb verwickelt gestalten.

In der Regel wird es daher vorzuziehen sein, den Wasserschlofsquerschnitt so grofs zu machen, dafs die Stabilitätsbedingung mit hinreichender Sicherheit erfüllt ist.

Die Stabilitätsbedingung ist allerdings nur für den Fall der konstanten Belastung abgeleitet worden; in Wirklichkeit ist zwar die Belastung kaum jemals ganz konstant, doch bringen die fast immer vorliegenden unregelmäfsigen kleinen Belastungsschwankungen keine wesentliche Änderung der Verhältnisse; da, von Ausnahmefällen abgesehen, stets viele Schwingungsperioden vergehen, bevor die Ausschläge eine gefährliche Gröfse erreichen, kommt es nur darauf an, dafs die Belastungsänderungen nicht periodisch in Intervallen erfolgen, welche der Schwingungsdauer des Systems Stollen-Wasserschlofs sehr nahe entsprechen. Diese Möglichkeit kann meist als ausgeschlossen gelten, und somit ist es auch gerechtfertigt, den Fall der konstanten Belastung für den wichtigsten zu bezeichnen und vor allem dafür zu sorgen, dafs bei ihm keine angefachten Schwingungen auftreten.

---

7. Aperiodische Bewegungsformen.

Wenn man den Wasserschlofsquerschnitt F für eine gegebene Anlage kleiner macht, als die Stabilitätsbedingung verlangt und dann, ohne an den übrigen Verhältnissen etwas zu ändern, noch weiter verkleinert, nimmt das Verhältnis zweier aufeinander folgenden Amplituden für sehr kleine Ausschläge immer mehr zu. Es wird nun durch den Vergleich mit den an ausgeführten Anlagen gewonnenen Erfahrungen wahrscheinlich gemacht, dafs bei hinreichender Verkleinerung von F überhaupt keine Schwingungsbewegung mehr auftritt, sondern dafs eine sehr kleine Gleichgewichtsstörung ohne Schwingung zu einer grofsen Störung auswächst. Dieser Fall kann offenbar nur dann eintreten, wenn die Differentialgleichung eine aperio-

dische Lösung hat, d. h. wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung 14) reell sind. Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$w = -\frac{\delta + \varkappa r}{\alpha + \beta r + \gamma r^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta + \varkappa r}{\alpha + \beta r + \gamma r^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon + 2\zeta r + 3\eta r^2}{\alpha + \beta r + \gamma r^2}} \quad 33)$$

Für den Fall der aperiodischen Bewegung ist der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen dieser Gleichung positiv, sonst negativ, im Grenzfall ist er gleich Null. Um den Grenzfall zu ermitteln, setzt man also:

$$\left(\frac{\delta + \varkappa r}{\alpha + \beta r + \gamma r^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon + 2\zeta r + 3\eta r^2}{\alpha + \beta r + \gamma r^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34)$$

Indem man in diese Gleichung die Werte der Koeffizienten aus den Gleichungen 10) einsetzt, erhält man nach einigen Zwischenrechnungen die folgende Beziehung zwischen den Konstanten des Problems, welche für den Grenzfall erfüllt sein mufs:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{A - 2gkAF}{Lf_1}\right)^2 \\ &-\left\{\frac{4fg}{L}\left[H_g^4 - 6H_g^3 r + 12 H_g^2 r^2 - 10 H_g r^3 + 3r^4\right]\right\} = 0 \end{aligned}\right\} 35)$$

Man kann diese Beziehung als eine Gleichung für den erforderlichen Wasserschlofsquerschnitt F auffassen, der, wie oben dargelegt wurde, hauptsächlich zur Wahl freisteht. Man hat dann eine quadratische Gleichung für F, deren Auflösung durch längere Rechnung in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\left.\begin{aligned} F = &\frac{Lf}{2gk(H_g - r)} \\ &\left\{\left[1 + \frac{f^2}{kA^2}(H_g - r)^2 (H_g - 3r)\right] \pm \sqrt{\left[1 + \frac{f^2}{kA^2}(H_g - r)^2 (H_g - 3r)\right]^2 - 1}\right\} \end{aligned}\right\} 36)$$

Zuerst soll nun untersucht werden, wann die Lösungen dieser Gleichung reell sind und dann soll die Bedeutung der beiden Wurzeln dargelegt werden.

Die Lösungen der Gleichung sind reell, wenn die Klammergröfse unter dem Wurzelzeichen gröfser als eins ist. Da alle in der Gleichung vorkommenden Konstanten dem Wesen nach reell und positiv sind, ist die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür, dafs $3r < H_g$ ist. Sobald $3r > H_g$ ist, sind die Lösungen komplex, und der Grenzfall zwischen aperiodischer und periodischer Bewegung kann durch gar keine Wahl des Wasserschlofsquerschnittes herbeigeführt werden.

Dieses Resultat läfst eine sehr einfache mechanische Deutung zu. Man betrachte nämlich die Leistung der Turbinenanlage für einen Beharrungszustand, sie ist

$$N = 10\ Q H_n \frac{\eta}{0{,}75}$$

oder, da

$$H_n = H_g - kv^2$$

und

$$Q = f v$$

$$N = 10\, f v\, (H_g - v^2) k \frac{\eta}{0{,}75} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 37)$$

Man ermittele nun unter der stets gemachten Voraussetzung, dafs der Wirkungsgrad η von Turbinen und Rohrleitung zusammen konstant sei, den Wert von v, für den das Maximum der Leistung N eintritt. Man setzt also, indem man Gleichung 37) nach v differentiiert,

$$\frac{dN}{dv} = 0 = 10\, f \frac{\eta}{0{,}75} (H_g - 3\, k v^2)$$

und erhält somit als Bedingung für das Maximum der Turbinenleistung:

$$H_g - 3\, k v^2 = 0$$

kv^2 war aber der Druckhöhenverlust im Stollen, und somit ergibt sich ganz allgemein, dafs das Leistungsmaximum einer Wasserkraftanlage bei unbegrenztem Wasserzufluſs stets dann erreicht wird, wenn ein Drittel des Bruttogefälles durch Reibungsverluste in der Zuleitung verbraucht wird. Wenn mehr Wasser verbraucht wird, als diesem Reibungsverluste entspricht, nimmt die Turbinenleistung wieder ab, weil die Abnahme des wirksamen Gefälles dann mehr ausmacht als die Zunahme der Wassermenge. Wenn also an einer Turbinenanlage mit Wasserschlofs ein Beharrungszustand vorliegen würde, bei dem $3r > H_g$ ist und z. B. eine kleine Belastungsvergröfserung der Turbinen vorgenommen wird, werden die Turbinen durch das Sinken der Umlaufzahl etwas geöffnet; dieses Öffnen bringt aber alsbald keine Vergröfserung, sondern eine Verkleinerung der Leistung hervor, so dafs die Regler die Turbinen noch weiter öffnen usf. Es ist leicht ersichtlich, dafs in diesem Falle jeder kleine Anstofs zu einer aperiodischen, stets weiter wachsenden Bewegung (bis zur Erreichung der Anschläge) führen mufs, dafs somit tatsächlich für keinen Wert von F der Grenzfall zwischen periodischer und aperiodischer Bewegung eintreten kann.

Bei ausgeführten Anlagen wird man aus Gründen der Wasserersparnis stets mit beträchtlich geringeren Reibungsverlusten arbeiten, als dem Leistungsmaximum entspricht; dadurch erhält auch die früher (S. 12) gemachte Voraussetzung $3\,r < H_g$ ihre Begründung. An dieser Voraussetzung soll auch für das Folgende festgehalten werden.

Die beiden Wurzeln der Gleichung für F (Gleichung 36), welche die Grenze zwischen periodischer und aperiodischer Bewegung angeben, sind dann stets reell und positiv; der Wert von F, der dem negativen Vorzeichen vor der Wurzel entspricht, sei mit F_1, der andere mit F_3 bezeichnet. Um die Bedeutung dieser beiden Werte zu erkennen, mufs man ermitteln, ob die Bewegung innerhalb oder aufserhalb des Bereiches $F_1 - F_3$ periodisch verläuft; dies geschieht am einfachsten, indem man probeweise rein formal $F = +\infty$ und $F = -\infty$ in die Gleichung 33) einsetzt; wenn man noch beachtet, dafs die beiden Glieder der linken Seite von Gleichung 35) den beiden Gliedern unter dem Wurzelzeichen der Gleichung 33) entsprechen, findet man, dafs für die genannten Werte von F die Wurzeln w reell werden. Daraus folgt, dafs die Bewegung aperiodisch wird, wenn F aufserhalb des Bereiches $F_1 - F_3$ liegt, und dafs eine Schwingungsbewegung auftritt, wenn F in diesem Bereiche enthalten ist.

Für den Fall, dafs eine Schwingungsbewegung vorliegt, war früher gefunden worden, dafs die Schwingungen angefacht oder gedämpft sind, je nachdem $\frac{2\,g\,k\,F\,(H_g - r)}{L\,f}$ kleiner oder gröfser als eins ist (Gleichung 17), oder (nach F aufgelöst) je nachdem F kleiner oder gröfser als $\frac{L\,f}{2\,g\,k\,(H_g - r)}$ ist. Der Grenzwert von F, $\frac{L\,f}{2\,g\,k\,(H_g - r)}$, möge F_2 genannt werden. Der Faktor, welcher vor der Klammer in der zur Bestimmung von F_1 und F_3 dienenden Gleichung 36) steht, ist aber gerade gleich F_2, und da man leicht sieht, dafs der Wert der Klammergröfse für das negative Vorzeichen der Wurzel stets kleiner, für das positive stets gröfser ist als eins, folgt, dafs stets $F_1 < F_2 < F_3$ ist.

Der Charakter der Bewegung für den Fall, dafs F aufserhalb des Bereiches F_1 bis F_3 liegt, hängt ganz von den Vorzeichen der Wurzeln der charakteristischen Gleichung 14) ab, welche gegeben waren durch:

$$w = -\frac{\delta + \varkappa r}{\alpha + \beta r + \gamma r^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta + \varkappa r}{\alpha + \beta r + \gamma r^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon + 2\zeta r + 3\eta r^2}{\alpha + \beta r + \gamma r^2}} \quad 33)$$

Um über das Vorzeichen der Wurzeln zu entscheiden, sei zunächst daran erinnert, dafs die im Nenner stehende Gröfse $\alpha + \beta r + \gamma r^2$ stets positiv ist, so lange $3r < H_g$ ist; dasselbe läfst sich auch unter derselben Voraussetzung für den Zähler $\varepsilon + 2\zeta r + 3\eta r^2$ erweisen, indem man die Werte der Koeffizienten nach den Gleichungen 10) einsetzt. Der Ausdruck $\frac{\varepsilon + 2\zeta r + 3\eta r^2}{\alpha + \beta r + \gamma r^2}$ unter dem Wurzelzeichen der Gleichung 33) ist daher stets positiv, und damit fällt auch der absolute Betrag der Wurzel stets kleiner aus als der absolute Betrag des vor der Wurzel stehenden Gliedes (solange die Wurzel, wie in dem angenommenen Fall, reell ist). Das Vorzeichen der beiden Wurzeln w hängt daher allein von dem Vorzeichen dieses Gliedes ab, welches bereits im vierten Abschnitt untersucht wurde. Indem man auf diese frühere Untersuchung zurückgreift, erkennt man, dafs die beiden Wurzeln w positiv oder negativ sind, je nachdem F kleiner oder gröfser als F_2 ist.

---

8. Zusammenfassung; Beispiele für die charakteristischen Wasserschlofsquerschnitte.

Wenn man jetzt noch die verschiedenen Arten der Spiegelschwankungen für kleine Gleichgewichtsstörungen zusammenfafst, die eintreten, wenn man sich den Wasserschlofsquerschnitt, von kleinen Werten anfangend, allmählich vergröfsert denkt, so gewinnt man folgendes Bild: Für kleine Werte von F, die noch unter F_1 liegen, wächst jede noch so kleine Gleichgewichtsstörung ohne Schwingungsbewegung zu einem endlichen Ausschlage aus; wenn F zwischen F_1 und F_2 liegt, tritt eine angefachte Schwingungsbewegung auf; für zwischen F_2 und F_3 liegende Werte von F ist die Schwingungsbewegung gedämpft, und wenn F gröfser ist als F_3, wird nach jeder kleinen Störung der neue Beharrungszustand ohne Schwingungen erreicht.

Um über die Gröfsenordnung der verschiedenen Wasserschlofsquerschnitte ein Urteil zu gewinnen, habe ich

$$F_1 = \frac{Lf}{2gk(H_g - r)} \left\{ \left[1 + \frac{f^2}{kA^2} (H_g - r)^2 (H_g - 3r) \right] - \right.$$

$$- \sqrt{\left[1 + \frac{f^2}{k A^2} (H_g - r)^2 (H_g - 3r)\right]^2 - 1} \Bigg\}$$

$$F_2 = \frac{L f}{2 g k (H_g - r)}$$

und

$$F_3 = \frac{L f}{2 g k (H_g - r)} \left\{ \left[1 + \frac{f^2}{k A^2} (H_g - r)^2 (H_g - 3r)\right] + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left[1 + \frac{f^2}{k A^2} (H_g - r)^2 (H_g - 3r)\right]^2 - 1} \right\}$$

für vier Beispiele berechnet.

1. Beispiel:

$H_g = 10$ m, $L = 301$ m, $f = 12{,}57$ qm (4 m Durchmesser)

$k = 0{,}0712 \frac{\text{sec}^2}{\text{m}}$ (entsprechend λ [1]) = ca. 0,018),

$A = 250$ mt/sec (entsprechend N = ca. 2500 PS),

woraus sich berechnet:

$$r = 0{,}299 \text{ m}$$

und

$F_1 = 4{,}20$ qm, $F_2 = 279$ qm, $F_3 = 17560$ qm.

2. Beispiel:

$H_g = 6{,}8$ m, die übrigen Gröfsen wie beim ersten Beispiel (etwa für dieselbe Anlage bei Hochwasser geltend). Es folgt

$$r = 0{,}778 \text{ m}$$

und

$F_1 = 33{,}6$ qm, $F_2 = 450$ qm, $F_3 = 6040$ qm.

3. Beispiel:

$H_g = 50$ m, $L = 301$ m, $f = 2{,}53$ qm (1,8 m Durchmesser)

$k = 0{,}1535 \frac{\text{sec}^2}{\text{m}}$ (entsprechend λ = ca 0,016),

$A = 250$ mt/sec (entsprechend N = ca. 2500 PS),

woraus

$$r = 0{,}616 \text{ m}$$

und

$F_1 = 0{,}0323$ qm, $F_2 = 5{,}13$ qm, $F_3 = 812$ qm.

4. Beispiel:

$H_g = 200$ m, $L = 1300$ m, $f = 19{,}6$ qm (5 m Durchmesser)

$k = 0{,}221 \frac{\text{sec}}{\text{m}^2}$ (entsprechend λ = ca. 0,013),

$A = 9000$ mt/sec (entsprechend N = ca. 90000 PS),

[1]) Siehe S. 13.

es folgt:

$$r = 1{,}18 \text{ m}$$

und

$$F_1 = 0{,}088 \text{ qm}, \qquad F_2 = 29{,}6 \text{ qm}, \qquad F_3 = 9950 \text{ qm}.$$

Aus diesen Beispielen geht sofort hervor, dafs der zur Herbeiführung eines aperiodischen Überganges von einem Gleichgewichtszustande zu einem neuen mindestens notwendige Wasserschlofsquerschnitt F_3 so grofs ist, dafs er bei einem künstlich angelegten Wasserschlofs kaum jemals erreicht werden wird. Da aufserdem kein Bedürfnis vorliegt, die Schwingungsbewegung ganz zu unterdrücken, ist der Wert von F_3 technisch ohne Interesse.

Ein grofses Interesse verdient dagegen der die Grenze der Stabilität kennzeichnende Wert F_2; es könnte sehr wohl vorkommen, dafs er bei Ausführungen unterschritten würde, wenn bei der Bemessung des Wasserschlofsquerschnittes auf Schwingungserscheinungen nicht geachtet wurde. Besonders liegt diese Gefahr dann vor, wenn der Stollen verhältnismäfsig kurz ist; denn in der Gleichung für F_2

$$F_2 = \frac{L f}{2 g k H_n}$$

ist das im Nenner stehende k — der Druckverlust im Stollen bei 1 m/sec Wassergeschwindigkeit, annähernd L proportional, so dafs sich F_2 wenig oder gar nicht ändert, wenn die Stollenlänge kleiner wird, während mit Rücksicht auf die erstmaligen Ausschläge des Wasserstandes bei gröfseren Belastungsänderungen der Wasserschlofsquerschnitt um so kleiner genommen werden kann, je kleiner L ist.

Es dürfte auch öfters vorkommen, dafs F_1 nahezu erreicht oder sogar unterschritten wird, und zwar weniger bei eigentlichen Wasserschlössern als bei sog. Standrohren. Bei Kraftwerken mit nur sehr langsam veränderlicher Belastung — Elektrizitätswerken für Lichtbetrieb — errichtet man manchmal Standrohre zu dem Zwecke bei plötzlichen Entlastungen durch aufsergewöhnliche Vorfälle, z. B. durch Kurzschlüsse, die Rohrleitung vor gefährlichen Drucksteigerungen zu schützen; der Standrohrquerschnitt kann dann klein gemacht werden, auch kleiner als F_2, weil das Überlaufen des Wassers über den Rand des Standrohres ein unzulässiges Anwachsen der Schwingungen verhindert. Eine Gefahr entsteht aber, wenn der Standrohrquerschnitt kleiner gemacht wird als F_1; bei strenger Erfüllung unserer Voraussetzungen würde dann auch eine ganz kleine Belastungsvergröfserung zur vollständigen Eröffnung der Turbine

verläuft allerdings die Bewegung des Wasserspiegels ziemlich schnell, so dafs die Vernachlässigungen, welche für langsame Bewegungen ohne merklichen Fehler zulässig waren (besonders das »Nacheilen« der Regler), hier das Ergebnis beeinträchtigen können. Wie weit dieser Einfluſs reichen kann, ersieht man am besten aus dem Verhalten der Regulierung bei Turbinenanlagen ohne Wasserschloſs, aber mit geschlossener Wasserzuführung durch eine Rohrleitung: um die in solchen Fällen wesentlich mitwirkende Elastizität der Rohrwandungen und des Wassers näherungsweise zu berücksichtigen, kann man sich an die Stelle der wirklichen Anlage eine andere gesetzt denken, welche eine starre Rohrleitung mit nicht zusammendrückbarem Wasser und ein sehr kleines Wasserschloſs besitzt, welches die beseitigt gedachte Elastizität ersetzt. Der instabile Bewegungsvorgang, der sich (wegen $F < F_1$) aus den obigen Ableitungen für die gedachte Anlage ergibt, müſste dann, wenn die begangenen Vernachlässigungen für diesen Fall zulässig wären, mit dem wirklichen Bewegungsvorgange übereinstimmen. Dies trifft nicht zu, und zwar erreicht man in solchen Fällen eine stabile Regulierung durch absichtliche Vergröſserung der Verzögerung der Reglerwirkung, indem man den Reglern einen groſsen Ungleichförmigkeitsgrad verleiht. Die gesteigerte Verzögerung gewinnt dann bei dem schnellen Verlauf der Bewegung derart an Wirksamkeit, dafs sie den Charakter der Erscheinung ganz ändert und den Bewegungsvorgang stabil macht; dabei ist natürlich der Wasserdurchlafs der Turbinen nicht mehr umgekehrt proportional dem wirksamen Gefälle, und die infolgedessen unvermeidlichen aber schnell vorübergehenden Veränderungen der Turbinenleistung müssen durch reichlich groſse Schwungmassen aufgenommen werden. Wenn aber versuchsweise oder aus Unkenntnis die Vergröſserung des Ungleichförmigkeitsgrades unterlassen wird, treten bekanntlich instabile Bewegungen ein von dem Charakter, der sich durch die Rechnung für ein Wasserschloſs mit $F < F_1$ ergibt. Die Oberfläche des gedachten Wasserschlosses, welches die Elastizität der Wasserzuleitung vertreten soll, ergibt sich stets als sehr klein; die ausgeführten Standrohre weisen viel gröſsere Oberflächen auf, und dementsprechend verläuft bei ihnen die Bewegung langsamer; trotzdem dürfte bei ihnen oft die Verzögerung der Reglerwirkung noch mitsprechen. Die tatsächlichen Verhältnisse werden dadurch günstiger, als sie nach der Rechnung erscheinen. Immerhin befindet man sich aber in einer Gefahrzone, sobald der Standrohrdurch den Regler führen. Bei derartig kleinen Standrohrquerschnitten

querschnitt nur wenig gröfser oder sogar kleiner als F_1 angenommen wird.

Da somit der Wert F_1 von technischem Interesse ist, und es auch bei ihm wegen des störenden Einflusses verschiedener anderer Faktoren sowieso nicht auf grofse Genauigkeit ankommt, soll im folgenden noch ein Näherungswert für F_1 abgeleitet werden, der sich ergibt, wenn auch die Reibung im Stollen vernachlässigt wird.

Wenn man dazu in dem Ausdruck für F_1

$$F_1 = \frac{L f}{2 g k (H_g - r)} \left\{ \left[1 + \frac{f^2}{k A^2} (H_g - r)^2 (H_g - 3 r) \right] - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\left[1 + \frac{f^2}{k A^2} (H_g - r)^2 (H_g - 3 r) \right]^2 - 1} \right. \quad . \quad . \quad 36)$$

die Reibung gleich Null annimmt, indem man $k = 0$ und $r = 0$ setzt, so erscheint F_1 unter der Form $\frac{0}{0}$. Man mufs also entweder nach den bekannten Regeln den Grenzwert von F_1 für $k = 0$ bestimmen, oder mufs, wenn man dies umgehen will, die ganze Ableitung wiederholen, indem man von vorne herein $k = 0$ einführt; man kommt dann ohne Grenzwertbestimmung zum Ziel. Auf beiden Wegen erhält man

$$F_1 = \frac{A^2 L}{4 f g H_g^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 38)$$

Diese Formel ist insofern der früheren überlegen, als sie die Abhängigkeit des F_1 von den Konstanten des Problems besser hervortreten läfst. Um den Fehler zu beurteilen, den man dabei durch Vernachlässigung der Reibung begangen hat, habe ich für die oben angeführten Beispiele F_1 nach Gleichung 38) ausgerechnet und habe erhalten

1. Beispiel	$F_1 =$	3,82	statt	4,20	qm
2. »	$F_1 =$	17,85	»	33,6	»
3. »	$F_1 =$	0,0305	»	0,0323	»
4. »	$F_1 =$	0,086	»	0,088	»

Die Formel 38) gibt eine bessere Annäherung, wenn man bei Einsetzung des Gefälles den Druckverlust im Stollen für den Beharrungszustand berücksichtigt, also statt Gleichung 38) schreibt

$$F_1 = \frac{A^2 L}{4 f g H_n^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 39)$$

Aus dieser Formel erhält man für dieselben Beispiele wie oben folgende Werte von F_1

1. Beispiel	$F_1 =$	4,31	statt	4,20	qm
2. »	$F_1 =$	29,0	»	33,6	»
3. »	$F_1 =$	0,0320	»	0,0323	»
4. »	$F_1 =$	0,088	»	0,088	»

Der Fehler, den man durch Vernachlässigung der Reibung begangen hat, ist somit verschwindend gegenüber den aus anderen Ursachen entspringenden Fehlern. Bemerkenswert an der Formel 39) ist das Vorkommen von A^2 im Zähler; A ist der Leistung der Turbinen proportional, und es ist daher zur Verhütung des dauernden Anwachsens einer kleinen Gleichgewichtsstörung ein um so gröfserer Standrohrquerschnitt erforderlich, je gröfser die Belastung des Werkes ist, oder bei feststehendem Standrohrquerschnitt nimmt die Gefahr für das Eintreten dieser Erscheinung mit der Belastung des Werkes zu. In dieser Beziehung liegen die Verhältnisse hier ganz ähnlich denen, die beim Fehlen eines Standrohres vorliegen, wo bekanntlich das »Pendeln« der Regler am leichtesten bei grofsen Beaufschlagungen eintritt.

9. Verfahren zur näherungsweisen Integration der Hauptgleichungen für endliche Ausschläge.

Inwiefern die bisher abgeleiteten Beziehungen auch für endliche Gleichgewichtsstörungen zutreffen, liefse sich am besten durch den Vergleich mit der Erfahrung an ausgeführten Anlagen entscheiden, an denen störende Schwingungserscheinungen beobachtet worden sind. Bisher liegt nur für die bereits erwähnte Anlage des Rurtalsperrenvereins eine Veröffentlichung vor; leider reichen aber die dabei gemachten Angaben nicht aus, um eine vollständige Nachrechnung zu ermöglichen; eine unter Benützung der veröffentlichten Zeichnungen angestellte überschlägliche Berechnung ergab nur, dafs der ausgeführte Wasserschlofsquerschnitt von dem Werte F_2 nicht sehr verschieden ist. Auch für die Zukunft sind weitere Aufschlüsse durch Beobachtungen an Wasserkraftanlagen nicht zu erwarten, da man sich natürlich sehr davor hüten wird, mit den Wasserschlofsquerschnitten bis in die Nähe von F_2 herunterzugehen.

Wenn man sich weiteren Aufschlufs über die Anwendbarkeit der für kleine Störungen abgeleiteten Beziehungen auf grofse Störungen verschaffen will, bleibt nichts anderes übrig, als die allgemeine Differentialgleichung des Problems für verschiedene Zahlen-

beispiele durch ein Näherungsverfahren stufenweise zu integrieren. Diese Integration wird am zweckmäfsigsten für das simultane System der Differentialgleichungen 4) und 6) durchgeführt; die stufenweise Integration der Differentialgleichung 9), in der nur eine abhängige Veränderliche vorkommt, würde einen weit gröfseren Aufwand an Rechenarbeit erfordern und aufserdem weniger anschaulich sein.

Die einfachste Art der Rechnung ergibt sich, wenn man in den Gleichungen 4) und 6) überall an Stelle der Differentiale dy, dv und dt die kleinen Differenzen Δy, Δv und Δt setzt und sie dann auf die Form

$$\Delta y = \frac{1}{F}\left(\frac{A}{H_g - y} - fv\right)\Delta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6a)$$

$$\Delta v = \frac{g}{L}(y - k v^2)\,\Delta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4a)$$

bringt. Um die Rechnung auszuführen, setzt man für irgend eine Zeit t, für die man die Werte von y und v bereits kennt, diese Werte und die entsprechenden Werte von F und A in die obigen Gleichungen ein und erhält dadurch näherungsweise den Zuwachs, den y und v in dem folgenden kleinen Zeitintervall Δt erfahren. Man hat dadurch die Werte von y und v für die Zeit $t + \Delta t$ gefunden und kann nun in derselben Art fortfahren. Voraussetzung ist natürlich, wie stets, dafs man den Zustand des Systems, also y und v, für den Beginn der Rechnung kennt; wenn es sich um den Fall handelt, dafs ein Beharrungszustand durch eine Belastungsänderung gestört wird, hat man für y und v am Anfang der Rechnung die dem vorhergehenden Beharrungszustande entsprechenden Werte einzusetzen. In der folgenden Tabelle ist der Anfang der Rechnung für ein Wasserschlofs von 100 qm Oberfläche und für einen Stollen wie beim früheren ersten Beispiel (Seite 25) zusammengestellt ($F = 100\,\text{qm}$, $L = 301\,\text{m}$, $H_g = 10\,\text{m}$, $k = 0{,}0712\,\frac{\text{sec}^2}{\text{m}}$, $f = 12{,}57$ (qm); es wurde dabei eine plötzliche Belastungsänderung von 1868 PS auf 3736 PS angenommen; bei einem Wirkungsgrade von 80 % für Rohrleitung und Turbine zusammen ergibt sich daraus ein plötzlicher Sprung der Konstanten A von 175 auf 350 mt/sec. Für die Zahlenrechnung ist es bequemer, nicht die Wassergeschwindigkeit im Stollen, sondern sofort die Wassermenge zu bestimmen ($Q_s = fv$); man erspart dann jedesmal die Multiplikation mit dem Stollenquerschnitt und gewinnt aufserdem durch den Vergleich mit der von den Turbinen verbrauchten Wassermenge eine gröfsere Übersicht

über den Vorgang. Zur einfachen Berechnung des Druckverlustes im Stollen bestimmt man eine neue Konstante $k_1 = \frac{k}{f^2}$, so dafs der Reibungsverlust nunmehr als $k_1 Q_s^2$ berechnet werden kann. Man erhält dadurch an Stelle der Gleichungen 6a) und 4a) die folgenden:

$$\Delta y = \frac{1}{F}\left(\frac{A}{H_g - y} - Q_s\right)\Delta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6b)$$

$$\Delta Q_s = \frac{fg}{L}(y - k_1 Q_s^2)\,\Delta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4b)$$

Tabelle 1.

t	y	Q_s	Q_r	$k_1 Q_s^2$	F	A	Δy	ΔQ_s
Beharrungszustand vor Eintritt der Störung	0,142	17,75	17,75	0,142	100	175	0	0
0	0,142	17,75	35,5	0,142	100	350	0,1775	0
1	0,3195	17,75	36,16	0,142	100	350	0,1841	0,0728
2	0,5036	17,8228	36,86	0,1435	100	350	0,1904	0,1475

Man erkennt leicht, weswegen das Ergebnis dieser Rechnung ungenau sein mufs; der Wert von $\frac{dy}{dt}$ für $t = 0$ ist genau berechnet; aus diesem Werte von $\frac{dy}{dt}$ ist dann Δy ermittelt worden; bei $t = 1$ ist aber $\frac{dy}{dt}$ bereits beträchtlich gröfser als bei $t = 0$, und das mittlere $\frac{dy}{dt}$ im Intervalle $t = 0$ bis $t = 1$, welches eigentlich zur Bestimmung von Δy dienen sollte, ist deswegen auch gröfser als der zur Rechnung benutzte Wert für $t = 0$. Eine ähnliche Ungenauigkeit begeht man bei der Berechnung von ΔQ_s. Das Verfahren ist wegen seiner Ungenauigkeit auch bei Anwendung kleiner Intervalle nur dann gut zu gebrauchen, wenn man blofs den ersten Ausschlag von y berechnen will; wenn man dagegen untersuchen will, ob die Schwingungsbewegung angefächt oder gedämpft verläuft, ist eine weit gröfsere Genauigkeit erforderlich, weil hier die meist nicht sehr grofse Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ausschlägen noch mit genügender Sicherheit ermittelt werden mufs. Dafür hat sich das im folgenden beschriebene Verfahren als zweckmäfsig erwiesen.

Man hat bei diesem Verfahren zu unterscheiden zwischen der Berechnung der Werte von y und Q_s für die ersten Intervalle und der Fortsetzung der Rechnung für den weiteren Verlauf.

Zur Berechnung der Werte von y und Q_s für die erste Intervalle entwickelt man y und Q_s nach einer Taylorschen Reihe, setzt also

$$y_t = y_0 + t\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 + \frac{t^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right) + \ldots \quad 40)$$

$$Q_{s_t} = Q_{s_0} + t\left(\frac{dQ_s}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2}\left(\frac{d^2Q_s}{dt^2}\right)_0 + \frac{t^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3Q_s}{dt^3}\right) + \ldots \quad 41)$$

Die Zahlenwerte der hier vorkommenden Differentialquotienten für $t = 0$ erhält man durch wiederholte Differentiation der Hauptgleichungen 4) und 6) nach t; vorher hat man v durch $\frac{Q_s}{f}$ und kv^2 durch $k_1 Q_s^2$ zu ersetzen:

$$\frac{L}{gf}\frac{dQ_s}{dt} = y - kQ_s^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 42)$$

$$F\frac{dy}{dt} = \frac{A}{H_g - y} = Q_s \quad \ldots\ldots\ldots \quad 43)$$

Aus Gleichung 42) ergibt sich

$$\frac{L}{gf}\frac{d^2Q_s}{dt^2} = \frac{dy}{dt} - 2k_1 Q_s \frac{dQ_s}{dt}$$

$$\frac{L}{gf}\frac{d^3Q_s}{dt^3} = \frac{d^2y}{dt^2} - 2k_1\left(\frac{dQ_s}{dt}\right)^2 - 2k_1 Q_s \frac{d^2Q_s}{dt^2}$$

Gleichung 43) liefert

$$F\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{A\frac{dy}{dt}}{(H_g - y)^2} - \frac{dQ_s}{dt}$$

$$F\frac{d^3y}{dt^3} = A\frac{(H_g - y)^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2(H_g - y)}{(H_g - y)^4} - \frac{d^2Q_s}{dt^2}.$$

Aus diesen Gleichungen kann man der Reihe nach die Zahlenwerte von $\frac{dQ_s}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2Q_s}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^3Q_s}{dt^3}$ und $\frac{d^3y}{dt^3}$ für $t = 0$ ermitteln. Für den Fall, dafs die Störung auf einen Beharrungszustand folgt, vereinfachen sich die Formeln noch beträchtlich; $H_g - y$ wird dann gleich dem Nutzgefälle für den früheren Beharrungszustand; es möge mit H_{n_0} bezeichnet werden; man erhält dann (für $t = 0$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ_s}{dt} &= 0, \quad \frac{d^2Q_s}{dt^2} = \frac{gf}{L}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^3Q_s}{dt^3} = \frac{gf}{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - 2k_1 Q_s \frac{d^2Q_s}{dt^2}\right] \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{F}\left[\frac{A}{H_{n_0}} - Q_s\right], \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{A}{F H_{n_0}^2}\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^3y}{dt^3} &= \frac{1}{F}\left\{\frac{A\left[H_{n_0}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]}{H_{n_0}^3} - \frac{d^2Q_s}{dt^2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad 44)$$

Die aus diesen Gleichungen berechneten Zahlenwerte der Differentialquotienten setzt man in die Gleichungen 40) und 41) ein und ermittelt mit ihnen die Werte von y und Q_s für $t = \tau$ und $t = 2\tau$; τ bedeutet dabei das Intervall, nach dem die Rechnung fortschreitet. Es wäre natürlich möglich, noch mehr Glieder der Taylorschen Reihe zu berücksichtigen; die Berechnung der vierten und höheren Differentialquotienten ist jedoch ziemlich umständlich, so dafs eine etwa verlangte Erhöhung der Genauigkeit zweckmäfsiger durch Verkleinerung der Intervalle für den Beginn der Rechnung erreicht wird.

Nachdem die Werte von y und Q_s für $t = \tau$ und $t = 2\tau$ (im folgenden als y_1, y_2 bzw. Q_{s1} und Q_{s2} bezeichnet) gefunden sind, kann man $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dQ_s}{dt}$ für diese Zeitpunkte aus den Grundgleichungen 42) und 43) berechnen. Um y_3 und Q_{s3} zu finden, wendet man ein Extrapolationsverfahren an. Man bildet zu diesem Zwecke die Differenzen

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_1 - \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \Delta^1\left(\frac{dy}{dt}\right)_1 = \Delta_1{}^1$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 = \Delta_2{}^1$$

und

$$\Delta_2{}^1 - \Delta_1{}^1 = \Delta^2.$$

Man setzt nun[1])

$$y_3 = y_2 + \tau\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right)_2 + \frac{\Delta_2{}^1}{2} + \frac{5}{12}\Delta^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 45)$$

Ganz ebenso ermittelt man Q_{s3}.

y_3 und Q_{s3} setzt man nun in die Grundgleichungen 42) und 43) ein und erhält dadurch $\left(\frac{dy}{dt}\right)_3$ und $\left(\frac{dQ_s}{dt}\right)_3$. y_4 und Q_{s4} findet man dann

[1]) Diese Formel kann auf geometrischem Wege abgeleitet werden; ihre Rechtfertigung ergibt sich in folgendem Abschnitte.

ganz ähnlich wie vorhin y_3 und Q_{s3}. Allgemein findet man den Wert y_{n+1} von y für $t = (n + 1)\,\tau$ nach der Vorschrift

$$y_{n+1} = y_n + \tau \left\{ \left(\frac{dy}{dt}\right)_n + \frac{\Delta_n^1}{2} + \frac{5}{12}\Delta_n^2 \right\} \quad . \quad . \quad 46)$$

Dasselbe gilt für $Q_{s(n+1)}$.

Für die Rechnung bietet dieses Verfahren gegenüber anderen zur näherungsweisen Integration von Differentialgleichungen gebräuchlichen Methoden praktisch den grofsen Vorteil, dafs sich Rechenfehler sofort in einer Unstetigkeit der Differenzen Δ ausdrücken und deswegen leicht bemerkt werden.

Oft ist es erwünscht, am Anfange der Rechnung zur Vergröfserung der Genauigkeit der Taylorschen Reihenentwicklung kleinere Intervalle anzunehmen als für die weitere Rechnung zweckmäfsig wäre. Für den Übergang von kleineren Intervallen zu gröfseren braucht man eine besondere Extrapolationsformel; wenn man y_n noch durch Rechnung mit Intervallen τ gefunden hat, und weiterhin ein s mal so grofses Intervall benutzen will, so kann man y_{n+1} finden als

$$y_{n+1} = y_n + s\tau\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)_n + s\left(\frac{\Delta_n^1}{2} + \frac{\Delta_n^2}{4}\right) + s^2\frac{\Delta_n^2}{6}\right] \quad 47)$$

In dieser Formel ist $s\tau$ das neue Intervall, und wenn man für die weitere Rechnung die Differenzen Δ bequem aus den bereits ermittelten Werten will bilden können, mufs s als ganze Zahl angenommen werden.

Die Berechtigung der angegebenen Extrapolationsformeln folgt daraus, dafs der bei ihrer Anwendung begangene Fehler, wie im nächsten Abschnitte gezeigt werden wird, von vierter Ordnung unendlich klein wird, wenn das Intervall τ von erster Ordnung klein ist im Vergleich zur Dauer einer Periode.

---

10. Genauigkeit des Verfahrens und zu erwartende Fehler.

Obwohl diese Berechnungsart verhältnismäfsig genau ist, empfiehlt es sich doch, sich über die Gröfse der zu erwartenden Fehler Rechenschaft zu geben. Der Fehler rührt von zwei Ursachen her: einmal von dem Fehler der Werte von y und Q_s für $t = \tau$ und $t = 2\,\tau$, der durch das Abbrechen der Taylorschen Reihenentwicklung nach dem dritten Gliede entsteht, und ferner von dem Fehler, den man bei jedem Schritte durch die Extrapolation nach Gleichung 46) begeht;

die zweite Fehlerquelle ist weitaus am wichtigsten, da sie im Laufe der Rechnung bei jedem Schritte wirksam wird, während der Fehler durch das Abbrechen der Taylorschen Reihe nur einmal begangen wird. Daher soll der durch die Extrapolation nach Gleichung 46) begangene Fehler genauer untersucht werden.

Die zu berechnende Funktion, z. B. y, kann man sich an der Stelle $t = n\,\tau$ in eine Potenzreihe entwickelt denken; z. B. in die folgende:

$$y_t = a + b\,(t - n\,\tau) + c\,(t - n\,\tau)^2 + d\,(t - n\,\tau)^3 + e\,(t - n\,\tau)^4 + f\,(t - n\,\tau)^5 + g\,(t - n\,\tau)^6 + \ldots \quad 48)$$

Der genaue Wert von y für $t = (n+1)\,\tau$ ist dann:

$$y_{n+1} = a + b\,\tau + c\,\tau^2 + d\,\tau^3 + e\,\tau^4 + f\,\tau^5 + g\,\tau^6 + \ldots \quad 49)$$

welcher verglichen werden soll mit dem nach Gleichung 48) durch Extrapolation zu findenden Werte. Dazu müssen zuerst die in der Gleichung 46) vorkommenden Gröfsen Δ^1_n und Δ^2_n ermittelt werden. Man findet durch Differenzieren der Gleichung 48):

$$\frac{dy}{dt} = b + 2\,c\,(t - n\,\tau) + 3\,d\,(t - n\,\tau)^2 + 4\,e\,(t - n\,\tau)^3 + 5\,f\,(t - n\,\tau)^4 + 6\,g\,(t - n\,\tau)^5 + \ldots \quad 50)$$

Aus dieser Gleichung erhält man:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_n = b$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{n-1} = b - 2\,c\,\tau + 3\,d\,\tau^2 - 4\,e\,\tau^3 + 5\,f\,\tau^4 - 6\,g\,\tau^5 + - \ldots$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{n-2} = b - 4\,c\,\tau + 12\,d\,\tau^2 - 32\,e\,\tau^3 + 80\,f\,\tau^4 - 192\,g\,\tau^5 + - \ldots$$

$$\Delta^1_n = \left(\frac{dy}{dt}\right)_n - \left(\frac{dy}{dt}\right)_{n-1} = 2\,c\,\tau - 3\,d\,\tau^2 + 4\,e\,\tau^3 - 5\,f\,\tau^4 + 6\,g\,\tau^5 - + \ldots$$

$$\Delta^1_{n-1} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{n-1} - \left(\frac{dy}{dt}\right)_{n-2} = 2\,c\,\tau - 9\,d\,\tau^2 + 28\,e\,\tau^3 - 75\,f\,\tau^4 + 186\,g\,\tau^5 - + \ldots$$

$$\Delta^2_n = \Delta^1_n - \Delta^1_{n-1} = 6\,d\,\tau^2 - 24\,e\,\tau^3 + 70\,f\,\tau^4 - 180\,g\,\tau^5 + - \ldots$$

Indem man die Werte Δ^1_n und Δ^2_n in die Extrapolationsformel einsetzt, erhält man:

$$y_{n+1} = a + \tau\left\{ b + \frac{1}{2}\left[2\,c\,\tau - 3\,d\,\tau^2 + 4\,e\,\tau^3 - 5\,f\,\tau^4 + 6\,g\,\tau^5 - + \ldots\right]\right\} + \frac{5}{12}\left[6\,d\,\tau^2 - 24\,e\,\tau^3 + 70\,f\,\tau^4 - 180\,g\,\tau^5 + - \ldots\right]$$

Man erhält hieraus:

$$y_{n+1} = a + b\,\tau + c\,\tau^2 + d\,\tau^3 - 8\,e\,\tau^4 + 26{,}7\,f\,\tau^5 - 72\,g\,\tau^6 + \ldots$$

und durch Vergleich mit dem wahren Wert (Gleichung 49) den Fehler

$$(= \text{Falsch-Richtig}) = -9\,e\,\tau^4 + 25{,}7\,f\,\tau^5 - 73\,g\,\tau^6 + \ldots \quad . \quad 51)$$

Der bei jedem Schritte begangene Fehler ist also klein von vierter Ordnung, wenn die Schritte τ von erster Ordnung klein sind gegen die Dauer einer Periode.

Die Extrapolationsformel 46) läfst sich natürlich noch verfeinern, wenn man noch höhere Differenzen berücksichtigt. Die Formel für die Berücksichtigung der nächst höheren Differenz soll hier noch angegeben werden, sie lautet:

$$y_{n+1} = y_n + \tau \left\{ \left(\frac{dy}{dt}\right)_n + \frac{\Delta^1 n}{2} + \frac{5}{12}\,\Delta^2 n + \frac{3}{8}\,\Delta^3 n \right\} \quad . \quad 52)$$

worin $\Delta^3 n = \Delta^2 n - \Delta^2 n_{-1}$ gesetzt ist.

Auf demselben Wege wie vorhin findet man den Fehler dieser Formel zu:

$$\text{Fehler} = -41{,}8\,f\,\tau^5 + 265{,}5\,g\,\tau^6 - \ldots \quad . \quad . \quad 53)$$

Der Fehler ist also, wie zu erwarten war, gegenüber der früheren Formel um eine Gröfsenordnung verkleinert.

Der Fehler der Extrapolation nach Gleichung 47) findet sich auf demselben Wege als:

$$\text{Fehler} = \tau^4\,e\,(-4\,s^2 - 4\,s^3 - s^4) + \tau^5\,f\,(15\,s^2 + 11{,}7\,s^3 - s^5) + \\ + \tau^6\,g\,(-42\,s^2 - 30\,s^3 - s^6) + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad 54)$$

Wenn man noch die dritten Differenzen berücksichtigen will, hat man Gleichung 47) zu ersetzen durch

$$y_{n+1} = y_n + s\,\tau \left\{ \left(\frac{dy}{dt}\right)_n + s \left(\frac{\Delta^1 n}{2} + \frac{\Delta^2 n}{4} + \frac{\Delta^3 n}{6}\right) \right. \\ \left. + s^2 \left(\frac{\Delta^2 n}{6} + \frac{\Delta^3 n}{6}\right) + s^3 \frac{\Delta^3 n}{24} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55)$$

Man begeht dann einen

$$\text{Fehler} = \tau^5\,f\,(-15\,s^2 - 18{,}33\,s^3 - 7{,}55\,s^4 - s^5) \\ + \tau^6\,g\,(108\,s^2 + 120\,s^3 + 37{,}5\,s^4 - s^6 + \ldots \quad . \quad . \quad 56)$$

Die Fehler sind, wie früher, klein von vierter, bzw. fünfter Ordnung. Für $s = 1$ werden die Gleichungen 47, 54—56 natürlich identisch mit den früheren Gleichungen 46, 51—53.

Die Form der zu berechnenden Funktionen zeigt im allgemeinen eine Annäherung an eine Sinuslinie (siehe z. B. Fig. 2).

Wenn man sich daher über die ungefähr zu erwartende Gröfse der in den Fehlergleichungen 51 und 53 auftretenden Koeffizienten eine Vorstellung bilden will, tut man gut, die Extrapolationsformeln auf eine Sinuslinie anzuwenden, und zwar soll dies im folgenden für die einfache Extrapolationsformel Gleichung 46) geschehen für den Zeitpunkt, in dem die zu berechnende Funktion y ein Maximum ist. Es sei also

$$y = A \cos \beta t = A \left(1 - \frac{\beta^2 t^2}{2!} + \frac{\beta^4 t^4}{4!} - \frac{\beta^6 t^6}{6!} + - \cdots\right)$$

Durch Vergleich mit Gleichung 48) ergibt sich für $t = 0$

$$e = \frac{A \beta^4}{4!} \quad f = 0 \quad g = \frac{A \beta^6}{6!}.$$

Man hat sich nun zu entscheiden mit wie grofsen Intervallen man sich die Rechnung durchgeführt gedacht haben will; wenn man z. B. τ so grofs wählt, dafs auf die ganze Periode 80 Stufen kommen, so mufs sein $\beta \cdot 80\,\tau = 2\,\pi$ oder $\tau = \frac{\pi}{40\,\beta}$.

Als Fehler einer Extrapolation ergibt sich dann (entsprechend Gleichung 51)

$$\text{Fehler} = A \left(-9 \frac{\beta^4}{4!} \frac{\pi^4}{40^4\,\beta^4} + 0 - 73 \frac{\beta^6}{6!} \frac{\pi^6}{40^6\,\beta^6} + \cdots\right)$$

Durch Ausrechnung findet man:

$$\text{Fehler} = A \left(-\frac{1}{70\,000} + 0 - \frac{1}{42\,000\,000} + \cdots\right)$$

Man sieht sofort, dafs nur das erste Glied in der Klammer in Betracht kommt und erhält als Absolutbetrag des Fehlers einer Extrapolation:

$$\text{Fehler} = \frac{A}{70\,000}.$$

Um die Berechnung für eine Periode durchzuführen, hat man 80 mal zu extrapolieren, und wenn man die wohl zulässige Annahme macht, dafs die Fehler sich ebenso addieren wie voneinander streng unabhängige Fehler, erhält man als Gesamtfehler für die Berechnung einer ganzen Periode:

$$\text{Gesamtfehler für eine Periode} = \frac{A \sqrt{80}}{70\,000} = \frac{A}{7830}.$$

Wenn man die Rechnung mit dem Rechenschieber ausführt, ist es aber zwecklos, die Intervalle so klein zu wählen, dafs der Fehler der Extrapolationsformel nur $\frac{1}{70\,000}$ der Amplitude beträgt, weil die

durch die Ungenauigkeit des Rechenschiebers hinzukommenden Fehler weit gröfser sind. Nimmt man deswegen die Intervalle gröfser, etwa derart, dafs eine Periode in 40 bzw. 35 bzw. 30 Stufen zerfällt, so berechnet sich der Fehler einer Extrapolation als $\frac{1}{4360}$ bzw. $\frac{1}{2540}$ bzw. $\frac{1}{1370}$ der Amplitude, und der Gesamtfehler für eine Periode zu $\frac{1}{690}$ bzw. $\frac{1}{430}$ bzw. $\frac{1}{250}$ der Amplitude. Auf die Berechnung der Vorgänge im Wasserschlofs dürfen diese Resultate allerdings nicht ohne weiteres übertragen werden, weil bei jeder Bestimmung von y bzw. Q_s die Werte der beiden Veränderlichen kombiniert werden; jedoch kann man aus dem Obigen immerhin entnehmen, dafs man reichlich sicher geht, wenn man die ganze Periode in 30—60 Stufen teilt. Vor dem Beginn der Rechnung kann man die ungefähre Dauer einer Periode aus den Gleichungen 22) und 24) entnehmen, und zwar braucht dafür in der Regel die Reibung im Stollen nicht berücksichtigt zu werden; man erhält dann aus diesen Gleichungen für die Dauer einer Periode den Wert $2\pi\sqrt{\frac{FL}{fg}}$.

Es kann noch bemerkt werden, dafs die Annahme, dafs die einzelnen Fehler sich ebenso addieren wie voneinander streng unabhängige Fehler, wahrscheinlich noch ungünstig ist, wenn man aus ihr den Gesamtfehler für eine Periode ermitteln will; wahrscheinlich wird der Gesamtfehler wesentlich kleiner, weil für die vorliegenden Schwingungsbewegungen die Einzelfehler ziemlich ebenso oft positives wie negatives Vorzeichen haben werden.

---

11. Besprechung ausgerechneter Beispiele.

Nach diesem Berechnungsverfahren wurden verschiedene Fälle durchgerechnet; das Gefälle und die Abmessungen des Stollens wurden ebenso angenommen wie im früheren ersten Beispiel (Seite 25), nämlich $H_g = 10$ m, $L = 301$ m; $f = 12{,}57$ qm (4 m Durchmesser), $k = 0{,}0712 \frac{\text{sec}^2}{\text{m}}$ (entsprechend $\lambda =$ ca. 0,016). Es wurde ferner

zuerst eine plötzliche Belastungsvergrößerung der Turbinen von einem Beharrungszustande mit 1750 PS Leistung aus auf 2500 PS zugrunde gelegt; bei 75% Wirkungsgrad für Turbine und Rohrleitung zusammen ergibt dies eine plötzliche Veränderung der Konstanten A von 175 auf 250 mt/sec. Für $A = 250$ waren bereits früher die drei charakteristischen Wasserschloßquerschnitte angegeben, nämlich

$$F_1 = 4{,}20 \text{ qm} \qquad F_2 = 279 \text{ qm} \qquad F_3 = 17560 \text{ qm}.$$

Fall 1. Zuerst wurde der Bewegungsvorgang für einen Wasserschloßquerschnitt von 300 qm berechnet; da dieser etwas größer ist als der kritische Wert F_2, war hier eine schwach gedämpfte Schwingung zu erwarten.

Der Beginn der Berechnung möge hier zur Erläuterung des Verfahrens wiedergegeben werden. Für den Beharrungszustand vor Beginn der Störung findet man $y = 0{,}142$ m und $Q_s = 17{,}75 \frac{\text{m}^3}{\text{sec}}$. Die Taylorsche Reihenentwicklungen (Gleichung 40, 41, 44) liefern:

$$y = 0{,}142 + 0{,}02530\, t + 0{,}0002170 \frac{t^2}{2} - 0{,}0000316 \frac{t^3}{6}$$

$$Q_s = 17{,}75 + 0{,}01037 \frac{t^2}{2} + 0{,}00002092 \frac{t^3}{6}.$$

Da man aus der angenäherten Formel für die Schwingungsdauer $T = 170$ sec erhält, genügt es, die Berechnung mit Intervallen von 6 sec vorzunehmen. Indem man in die beiden obigen Gleichungen $t = 6$ und $t = 12$ einsetzt, erhält man die aus der untenstehenden Tabelle ersichtlichen Werte von y und Q_s für $t = 6$ und $t = 12$. Man kann nun $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dQ_s}{dt}$ für $t = 0$, $t = 6$ und $t = 12$ bilden und erhält bei $t = 12$ die ebenfalls aus der Tabelle zu entnehmenden Werte von Δ^1 und Δ^2 für y und Q_s. Die weitere Rechnung erfolgt durch Extrapolation nach den Formeln:

$$y_{n+1} = y_n + 6 \left\{ \left(\frac{dy}{dt}\right)_n + \frac{\Delta^1}{2} + \frac{5}{12} \Delta^2 \right\}$$

$$Q_{s\,n+1} = Q_{s\,n} + 6 \left\{ \left(\frac{dQ_s}{dt}\right)_n + \frac{\Delta^1}{2} + \frac{5}{12} \Delta^2 \right\}$$

Tabelle (Fall 1)

t	$6\Delta^2$	$6\Delta^1$	$6\frac{dy}{dt}$	y	Q_r	Q_s	$6\frac{dQ_s}{dt}$	$6\Delta^1$	$6\Delta^2$	$k_1 Q_s^2$	A
0	0	0	0	0,142	17,75	17,75	0	0	0	0,142	175
0			0,1520	0,142	23,35	17,75	0			0,142	250
6		+56	0,1576	0,2965	25,77	17,938	0,3722	3722		0,145	250
12	— 92	— 36	0,1540	0,4521	26,20	18,502	0,7335	3613	—109	0,154	250
18	— 66	— 102	0,1438	0,6005	26,60	19,4117	1,0595	3260	—353	0,170	250
24	— 60	— 162	0,1276	0,7365	27,00	20,6195	1,3395	2800	—460	0,192	250
30	— 56	— 218	0,1058	0,8535	27,37	22,0798	1,5595	2200	—600	0,220	250

In der Tabelle ist der Kürze halber nur der Beginn der Berechnung angegeben, das Ergebnis ist jedoch in der Fig. 2 graphisch

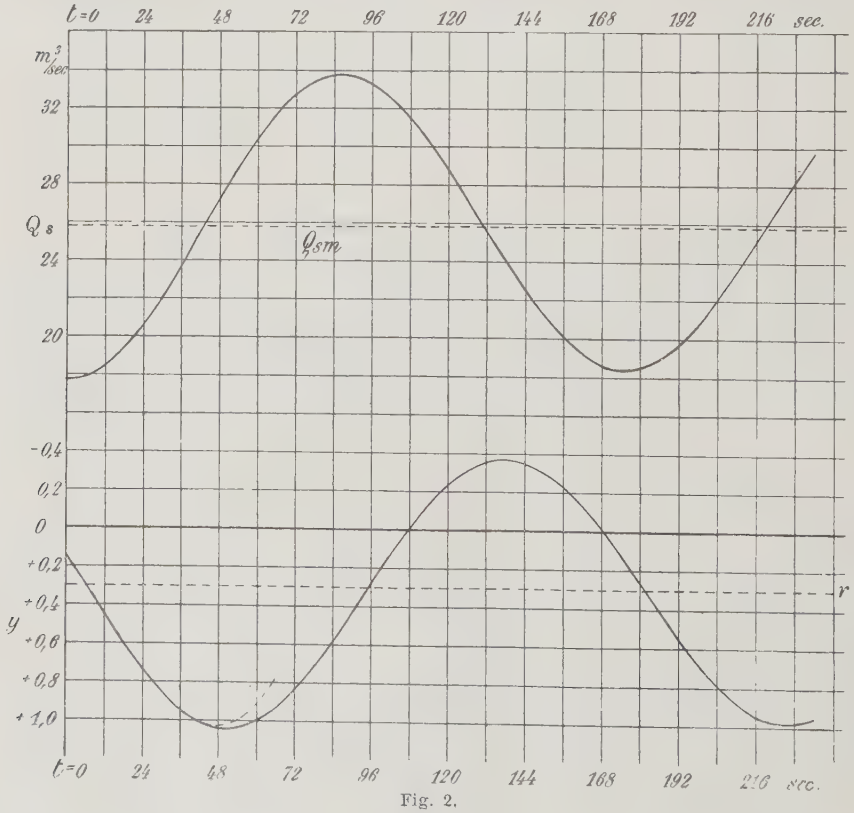

Fig. 2.

aufgetragen; man sieht, dafs die Schwingungen tatsächlich schwach gedämpft verlaufen: das erste Maximum von y bei $t = 50{,}4$ sec beträgt 1,039 m, das zweite Maximum bei $t = 226$ sec 0,982 m. Die Schwingungsdauer beträgt somit 175,6 sec und das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Ausschläge von y (gerechnet vom Wasserspiegel für den Beharrungszustand) 0,923. Für eine unendlich kleine Schwingung würde man für die vorliegenden Verhältnisse aus der Gleichung 12) eine Schwingungsdauer von 175,8 sec und für das genannte Verhältnis 0,945 erhalten; mit Rücksicht darauf, dafs die Schwingung überhaupt nur sehr schwach gedämpft ist, stimmen auch die Werte für das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Ausschläge befriedigend miteinander überein.

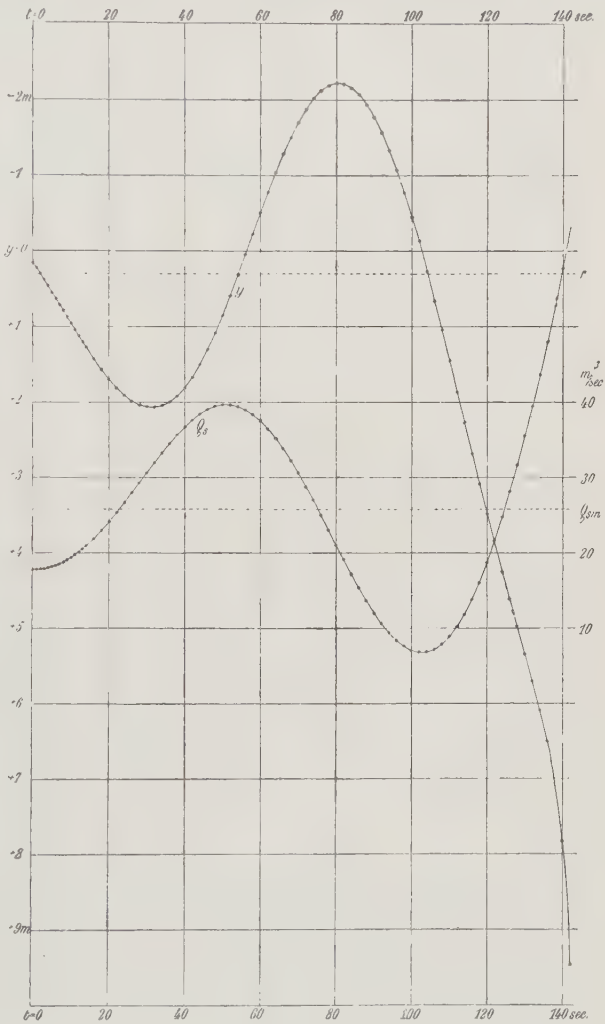

Fig. 3.

Um anzudeuten, wie weit die Genauigkeit der nach dem vierten Gliede abgebrochenen Taylorschen Reihe reicht, wurden die Werte von y aus ihr bis $t = 66$ sec berechnet und gestrichelt in die Figur eingetragen.

Fall 2 unterscheidet sich vom vorigen nur dadurch, dafs der Wasserschlofsquerschnitt zu 100 qm angenommen wurde, was beträchtlich weniger ist als der kritische Wert (279 qm). Es ist daher

eine angefachte Schwingung zu erwarten, was auch bestätigt wird durch die Ausrechnung, deren Ergebnisse in der Fig. 3 dargestellt sind. Besonders auffallend ist dabei, dafs während der zweiten Periode y über alle Grenzen hinaus wächst, oder vielmehr wachsen würde, wenn die Turbine stets so weit geöffnet werden könnte, dafs ihre Leistung unverändert bleibt. In Wirklichkeit wird etwa bei $y = 4$ m (zur Zeit $t = 133$ sec) die Turbine bereits voll geöffnet sein, so dafs in der folgenden Zeit die verlangte Turbinenleistung eben nicht aufgebracht werden kann; obwohl daher in diesem Bereiche die Rechnungsergebnisse keine technische Bedeutung mehr haben, wurde die Berechnung doch bis $y = 9{,}5$ m fortgeführt, weil man dadurch einen mathematisch interessanten Einblick in die Art der durch die Hauptgleichungen definierten Funktionen y und Q_s erhält.

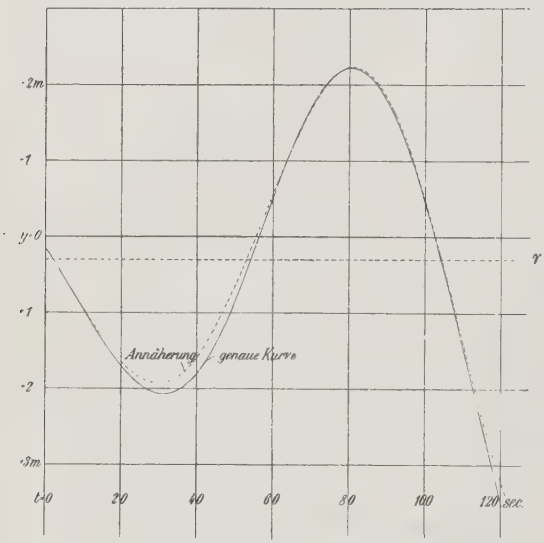

Fig. 4.

Für den beim Fall 2 angenommenen Wasserschlofsquerschnitt erhält man aus den früheren Formeln für unendlich kleine Schwingungen die Schwingungsdauer 102,2 sec und das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Ausschläge von y zu 2,35. An der errechneten Kurve kann man dies aber nicht wie früher unmittelbar nachprüfen, da y bereits beim zweiten positiven Ausschlage über jedes Mafs hinaus wächst. Der Differentialquotient $\frac{dy}{dt}$ für die Durchgänge von y durch die Gleichgewichtslage wächst aber für unendlich kleine Schwingungen in derselben Weise wie die Ausschläge von y, und wenn man die Werte von $\frac{dy}{dt}$ bestimmt für den ersten und zweiten gleichsinnigen Durchgang von y durch den dem Beharrungszustande entsprechenden Wert ($y = 0{,}299$), so müfsten sie, wenn sich die Schwingung bis zum zweiten Durchgange im Mittel über die Periode ähnlich verhält, wie eine unendlich kleine Schwin-

gung, ebenfalls im Verhältnis 1 : 2,39 stehen. Man findet für den ersten Durchgang zur Zeit 2,02 sec $\frac{dy}{dt} = 0{,}0797$, und für den zweiten Durchgang zur Zeit 104,20 sec $\frac{dy}{dt} = 0{,}1890$; die beiden Werte verhalten sich wie 1 : 2,37; die verflossene Zeit ist dabei gleich 102,18 sec. Es besteht also eine unerwartet grofse Übereinstimmung mit den bei unendlich kleinen Ausssschlägen eintretenden Erscheinungen.

Um eine noch bessere Anschauung darüber zu erhalten, in welcher Art sich die Schwingung von endlicher Amplitude von der unendlich kleinen Schwingung unterscheidet, wurde in Figur 4 der für Fall 2 errechnete Verlauf der y in Vergleich gestellt mit den Angaben der auf die endliche Schwingung angewandten Gleichung 12; und zwar wurden die Integrationskonstanten derart bestimmt, dafs beim ersten Durchgang von y (bei $t = 2{,}02$ sec) durch den dem Beharrungszustande entsprechenden Wert beide Kurven sich berühren. Obwohl nach Ablauf einer Periode die beiden Kurven fast zusammenfallen, bemerkt man doch, dafs während der ersten Hälfte der Periode die tatsächlichen Spiegelabsenkungen gröfser ausfallen als die nach der Gleichung 12) errechneten, eine Abweichung, welche sich aber während der zweiten Hälfte der ersten Periode fast ganz wieder ausgleicht. Ebenso ist es beim Beginn der zweiten Periode.

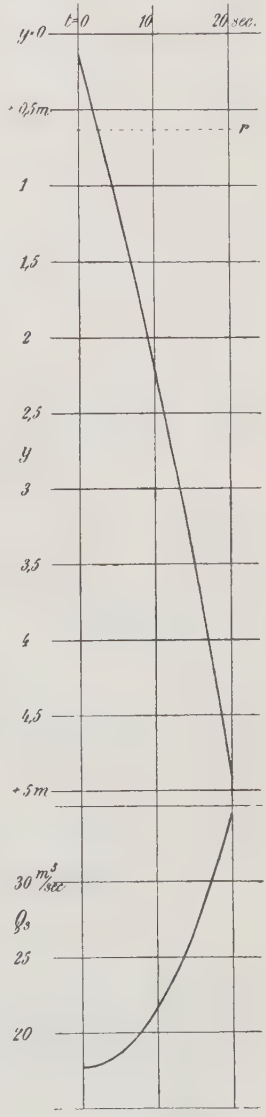

Fig. 5.

Für Fall 3 (Fig. 5) wurde eine plötzliche Belastungszunahme von 1750 PS auf 3500 PS angenommen; die übrigen Verhältnisse sind dieselben wie bei Fall 2. Man sieht, dafs für diese Belastungs zunahme y bereits beim ersten Ausschlag über alle Grenzen wächst, d. h. dafs der Turbinenregler bereits beim ersten Ausschlage den Leitapparat bis zum Anschlage öffnet.

Bei Fall 4 (Fig. 6) wurde der sehr grofse Wasserschlofsquerschnitt von 10000 qm angenommen, während die übrigen Abmessungen beibehalten wurden. Da dieser Wasserschlofsquerschnitt sich schon sehr dem Werte F_3 (17560 qm) nähert, sind die Schwingungen

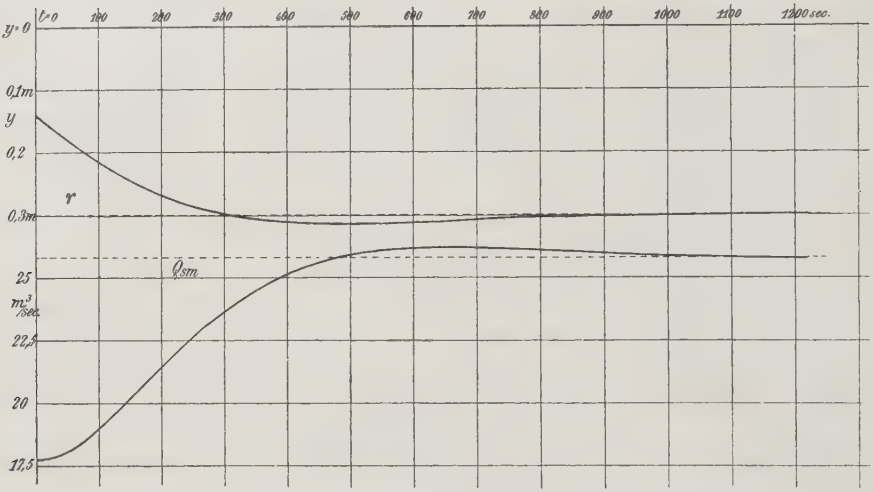

Fig. 6.

stark gedämpft, wie die für eine Belastungszunahme von 1750 auf 2500 PS durchgeführte Berechnung zeigt.

---

12. Verbesserung der Ergebnisse wegen der zeitlichen Verzögerung der Reglerwirkung.

Sowohl bei der Aufstellung der Hauptgleichungen als auch bei der im fünften Abschnitt gegebenen anderen Herleitung der Stabilitätsbedingung war die als »Nacheilen« bezeichnete zeitliche Verzögerung der Reglerwirkung nicht berücksichtigt worden. Es soll nun untersucht werden, welche Verbesserung bei Beachtung des Nacheilens an der früher gefundenen Stabilitätsbedingung (Gl. 17) anzubringen ist.

Später wird gezeigt werden, dafs die zeitliche Verzögerung, von ganz besonderen Ausnahmefällen abgesehen, klein ist im Ver-

hältnis zur Dauer einer ganzen Schwingungsperiode. Das Nacheilen der Regler kann dann genügend genau dadurch berücksichtigt werden, dafs man den Wasserverbrauch der Turbinen nicht umgekehrt proportional dem augenblicklichen Gefälle, sondern umgekehrt proportional dem vor einer konstanten Zeit ϑ, welche durch die Konstruktion und Einstellung des Reglers bestimmt wird, vorhanden gewesenen Gefälle setzt. Im übrigen soll die Ableitung nach der bereits im fünften Abschnitte erläuterten Methode erfolgen, indem die schwingungsdämpfenden und schwingungserregenden Ursachen getrennt voneinander betrachtet werden.

Die Ausführungen des fünften Abschnitts gelten bis Gleichung 24) (S. 15) ohne weiteres auch für die jetzt zu behandelnde Aufgabe, so dafs sich eine Wiederholung erübrigt.

Um weiterhin den Bewegungsvorgang für den Fall zu untersuchen, dafs die Wasserentnahme jeweils umgekehrt proportional dem vor der konstanten Zeit ϑ vorhanden gewesenen Gefälle ist, während der Reibungsverlust im Stollen als unveränderlich angenommen wird, setzt man zunächst ebenso wie früher

$$H = H_n + a \cos qt.$$

Gemäfs dem Obengesagten ist dann die dem Wasserschlofs sekundlich entnommene Wassermenge darzustellen durch:

$$Q_r = \frac{A_1}{H_n + a \cos q\,(t - \vartheta)}.$$

Damit die Turbinen bei dem veränderlichen Gefälle im Mittel dieselbe Wassermenge verbrauchen wie vorher im Beharrungszustande bei der Leistung A, mufs, ebenso wie im fünften Abschnitte, die Konstante A_1 der Bedingung genügen

$$A_1 = A \sqrt{\frac{H_n^2 - a^2}{H_n^2}}$$

oder

$$A_1 = A \left(1 - \frac{a^2}{2\,H_n^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 28)$$

Die dem Wasserschlofs entnommene Leistung ist hier jedoch infolge des Nacheilens der Regler nicht mehr genau konstant, sie wird

$$\text{Leistung} = Q_r \cdot H = \frac{A_1\,(H_n + a \cos qt)}{H_n + a \cos q\,(t - \vartheta)}.$$

Die dem Wasserschlofs während einer Schwingungsperiode im Mittel entzogene Leistung ist dann gleich dem Mittelwerte von

$$\frac{A_1 (H_n + a \cos q t)}{H_n + a \cos q (t - \vartheta)},$$

d. h. mittlere entzogene Leistung =

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{A_1 (H_n + a \cos q t)}{H_n + a \cos q (t - \vartheta)} \, dt.$$

Wenn man die Integration ausführt, höhere Potenzen von $\frac{a}{H_n}$ vernachlässigt, und aufserdem für A_1 den Wert aus Gleichung 28), S. 16 einsetzt, erhält man

$$\text{mittlere entzogene Leistung} = A \left(1 - \frac{a^2}{2 H_n^2} \cos q \vartheta\right).$$

A ist die dem Wasserschlofs im Mittel über eine Periode zugeführte Energie; somit bleibt beim Schwingungsvorgang im Mittel über eine Periode die Leistung

$$\frac{A a^2}{2 H_n^2} \cos q \vartheta$$

als Schwingungsenergie im Wasserschlofs zurück.

Die weiteren Betrachtungen decken sich wieder vollständig mit den bereits im fünften Abschnitte angestellten; an die Stelle der Gleichung 31) tritt die neue Gleichung

$$\frac{A a^2}{2 H_n^2} \cos q \vartheta = F a \frac{da}{dt}$$

und als Stabilitätsbedingung findet man schliefslich auf genau demselben Wege wie früher:

$$\frac{2 g k F H_n}{L f} > \cos q \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 57)$$

Durch Vergleich mit der früher gefundenen Stabilitätsbedingung sieht man, dafs durch das Nacheilen der Regler die Stabilität verbessert wird; gleichzeitig sieht man aber auch, dafs ein geringes Nacheilen (wegen $\cos q \vartheta$ nahezu $= 1$) so gut wie gar nichts ausmacht. Um ein Urteil darüber zu gewinnen, ob das Nacheilen in gewöhnlichen Fällen wesentlich mitspricht, mufs die Gröfse der zeitlichen Verzögerung ϑ aus den Konstruktionsdaten der Turbinenregler gerechnet werden.

Diese Aufgabe läfst sich für moderne Turbinenregler mit nachgiebiger Rückführung leicht lösen für den Fall, dafs das Gefälle sich langsam linear mit der Zeit ändert; man mufs dazu allerdings noch

eine Annahme darüber machen, wie sich die von der Turbine abgegebene Leistung mit der Umlaufzahl ändert.

In Fig. 7 ist ein Regler mit nachgiebiger Rückführung, welcher die Turbine bei allen Belastungen im Beharrungszustande auf die gleiche Umlaufzahl einstellt, schematisch dargestellt. Zur Charakterisierung des Reglers werden zweckmäfsigerweise folgende Konstanten verwendet:

1. Der Ungleichförmigkeitsgrad, den die Turbine zwischen Leerlauf und voller Belastung aufweisen würde, wenn die Nachgiebigkeit

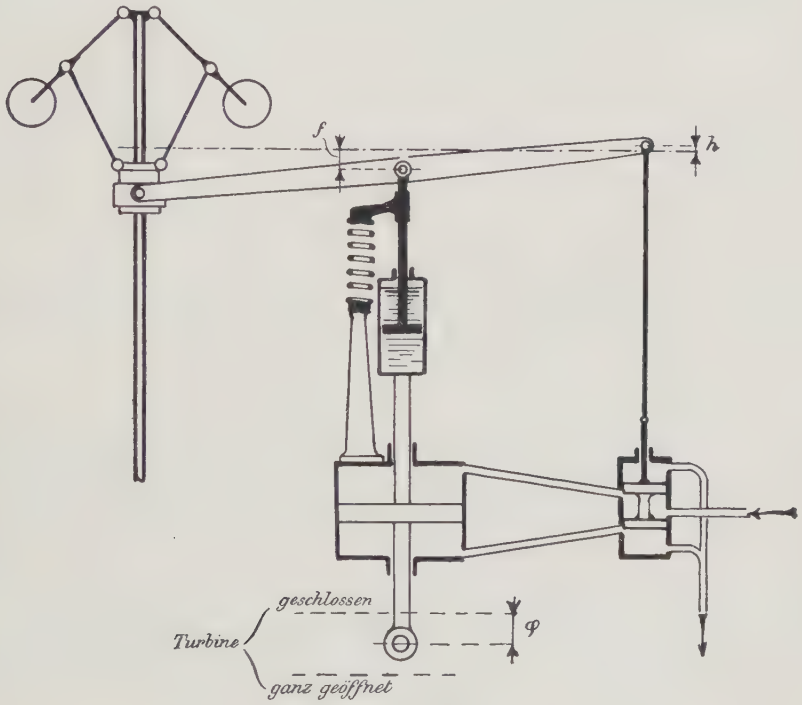

Fig. 7.

der Rückführung aufgehoben wäre — δ, in Prozenten der normalen Umlaufzahl.

2. Die Zeit, welche der Arbeitskolben zur Zurücklegung seines ganzen Hubes braucht, wenn das Fliehkraftpendel um 1% der normalen Umlaufzahl schneller umläuft als derjenigen Muffenstellung entspricht, welche der Mittelstellung des Steuerventils durch den augenblicklichen Stand der Rückführung zugeordnet wird — bezogene

Schlufszeit τ. (Es wird dabei vorausgesetzt, dafs die Eigenschwingungsdauer des Fliehkraftpendels vernachlässigbar klein ist, und dafs die Geschwindigkeit des Arbeitskolbens stets proportional dem Hube des Steuerventiles ist.)

3. Die Zeitkonstante c der nachgiebigen Rückführung, definiert durch die Gleichung: Relativgeschwindigkeit zwischen Kolben und Gehäuse der Ölbremse $= c$ mal Abweichung des nachgiebigen Teiles aus der Mittellage. Für den Gebrauch bequemer ist meistens die sog. Halbierungszeit σ der nachgiebigen Rückführung, worunter die Zeit verstanden wird, die bei festgestelltem Gehäuse der Ölbremse verfliefst, bis der nachgiebige Teil in die Hälfte seiner ursprünglichen Entfernung aus der Mittellage gekommen ist. Zwischen c und σ besteht die Beziehung $\frac{l_n \cdot 2}{c} = \sigma$. Das an der Turbine wirksame Gefälle möge sich nun linear langsam mit der Zeit ändern, und zwar etwa abnehmen, so dafs das Gefälle zurzeit t dargestellt wird durch

$$H = H_n\,(1 - \beta\, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 58)$$

Es bildet sich dann am Regler ein Beharrungszustand aus, indem die Strecken f und h (Fig. 6) konstant sind, während die Eröffnung der Turbine, φ, langsam zunimmt, da der Regler die Leistung trotz des abnehmenden Gefälles unverändert hält.

Zunächst mufs nun die Geschwindigkeit bestimmt werden, mit welcher φ zunehmen mufs, damit die Leistung bis auf eine von erster Ordnung kleine Änderung konstant bleibt. Die Strecken f und φ mögen in Bruchteilen des ganzen Arbeitskolbenhubes ausgedrückt werden, und die Eröffnung der Turbine zur Zeit $t = 0$ möge mit φ_0 bezeichnet werden. Ferner werde die Annahme gemacht, dafs die Leistung der Turbine bei gegebenem Gefälle proportional mit φ ist. Dann mufs, da die Leistung der Turbine bei gegebener Öffnung proportional mit $H^{3/2}$ ist, die Gleichung erfüllt sein

$$\text{Leistung} = C\,\varphi\, H^{3/2} = C\,\varphi_0\, H_n^{3/2} = \text{constant} \quad . \quad . \quad 59)$$

(worin C eine von der Konstruktion der Turbine abhängige Konstante ist). Der Wert φ zur Zeit t kann in dem kleinen betrachteten Bereiche dargestellt werden durch

$$\varphi = \varphi_0 + \gamma\, t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60)$$

wo γ auf Grund der Bedingung, dafs die Leistung konstant ist, bestimmt werden kann. Setzt man nämlich in die Gleichung 59) die Werte von φ und H aus Gleichungen 60) und 58) ein, so erhält man

$$\text{Leistung} = C\,(\varphi_0 + \gamma\, t)\; H_n^{3/2}\; (1 - \beta\, t)^{3/2} = \text{constant} \quad . \quad 61)$$

Durch Differentiieren dieser Gleichung nach t erhält man für $t = 0$ als Bedingung für γ

$$\gamma = 3/2\ \beta\ \varphi_0.$$

Die frühere Gleichung 60) geht dadurch über in

$$\varphi = \varphi_0 + 3/2\ \beta\ \varphi_0\ t$$

und die Geschwindigkeit, mit der sich der Arbeitskolben bewegt, ist somit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{2}\ \beta\ \varphi_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62)$$

Zuerst soll nun die Erniedrigung der Umlaufzahl berechnet werden, welche vorhanden sein mufs, um diese Geschwindigkeit des Arbeitskolbens zu bewirken. Diese Erniedrigung ist aus zwei Gründen notwendig: erstens mufs das Steuerventil um eine gewisse Strecke aus der Mittellage verschoben sein, und zweitens mufs der mittlere Punkt des Rückführungshebels ebenfalls um ein gewisses Stück aus der Mittellage verschoben sein, weil zwischen dem Gehäuse und dem Kolben der Ölbremse die Relativgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ besteht.

Aus der Definition der bezogenen Schlufszeit folgt, dafs bei einer einprozentigen Erniedrigung der Umlaufzahl unter diejenige, welche der der Mittelstellung des Steuerventils durch den augenblicklichen Stand der Rückführung zugeordneten Muffenstellung entspricht, eine Geschwindigkeit des Arbeitskolbens von $\frac{1}{\tau}$ eintritt. Um die durch Gleichung 62) angegebene Geschwindigkeit zu erzeugen, ist daher zunächst eine Erniedrigung der Umlaufzahl um

$$\Delta_1 = {}^3/_2\ \beta\ \varphi_0\ \tau\ {}^0/_0$$

erforderlich.

Dazu kommt noch eine weitere Erniedrigung, weil sich der mittlere Punkt des Rückführungshebels um die Strecke f senkt. Für f besteht die Bedingung

$$f \cdot c = \frac{d\varphi}{dt}$$

(worin c = Zeitkonstante der nachgiebigen Rückführung $= \frac{l_n\, 2}{\sigma}$ ist).

Durch Einsetzen von $\frac{d\varphi}{dt}$ aus Gleichung 62) erhält man

$$f = \frac{3}{2}\ \beta\ \varphi_0 \frac{\Theta}{l_n\, 2} = \frac{3}{2}\ \beta\ \varphi_0\ 1{,}45\ \sigma.$$

Aus der Definition von δ folgt, dafs diese Verschiebung eine Erniedrigung der Umlaufzahl um

$$\Delta_2 = f\,\delta = \frac{3}{2}\,\beta\,\varphi_0\,1{,}45\,\sigma\,\delta\,\%$$

erfordert.

Die im ganzen eintretende Erniedrigung der Umlaufzahl ist also

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{3}{2}\,\beta\,\varphi_0\,(1{,}45\cdot\sigma\,\delta + \tau)\,\% \quad . \quad . \quad 63)$$

Um die Verringerung der Turbinenleistung zu berechnen, welche bei gegebener Belastung dieser Erniedrigung der Umlaufzahl entspricht, kann man annehmen, dafs die Leistung einer Potenz der Umlaufzahl proportional sei, also etwa setzen:

$$\text{Leistung} = \text{Normalleistung}\cdot\left(1 - \frac{\Delta}{100}\right)^{\alpha}$$

wobei der Exponent α zunächst noch unbestimmt bleiben kann. Da $\frac{\Delta}{100}$ stets nur ein kleiner Bruch ist, kann man statt der vorigen Gleichung auch schreiben:

$$\text{Leistung} = \text{Normalleistung}\cdot\left(1 - \alpha\,\frac{\Delta}{100}\right).$$

Die augenblickliche Turbinenleistung ist also zu klein um

$$\text{Normalleistung}\cdot\alpha\,\frac{\Delta}{100} = \text{fehlende Leistung.}$$

Statt dieses Ausdruckes kann man auch, genau bis auf Gröfsen zweiter Ordnung schreiben:

$$\text{augenblickliche Leistung}\cdot\alpha\,\frac{\Delta}{100} = \text{fehlende Leistung}$$

oder unter Beachtung von Gleichung 59)

$$C\,\varphi\,H^{3/2}\cdot\alpha\,\frac{\Delta}{100} = \text{fehlende Leistung.}$$

Damit die Turbine bei der erniedrigten Umlaufzahl und bei der augenblicklichen Leitapparatöffnung die Normalleistung abgibt, müfste das Gefälle etwas gröfser sein, und zwar, wie man bei Beachtung von Gleichung 59) sehen kann, um den Betrag

$$\frac{2}{3}\,\frac{\text{fehlende Leistung}}{\text{Leistung}}\,H,$$

d. h. um

$$\frac{2}{3}\,\frac{C\,\varphi\,H^{3/2}\,\alpha\,\frac{\Delta}{100}}{C\,\varphi\,H^{3/2}}\,H.$$

Ein um diesen Betrag gröfseres Gefälle soll aber um die Zeit ϑ früher vorhanden gewesen sein, und zwar findet man unter Beachtung von Gleichung 58), dafs

$$\dot{H}\beta\vartheta = \frac{2}{3}\,\frac{C\varphi H^{3/2}\alpha\,\frac{\Delta}{100}}{C\varphi H^{3/2}}\,H.$$

Die jeweilige Eröffnung der Turbine entspricht also nicht dem augenblicklichen, sondern einem um die durch diese Gleichung bestimmte Zeit ϑ vorher vorhanden gewesenen Gefälle. Durch Einsetzen des Wertes von Δ (Gleichung 63) in die vorige Gleichung erhält man

$$\vartheta = \frac{\alpha\varphi_0}{100}\,(1{,}45\,\sigma\delta + \tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 64)$$

Die für einen Turbinenregler erforderlichen bzw. zulässigen Werte der charakteristischen Konstanten σ, δ und τ hängen von vielen Umständen ab; wenn man sich über die im allgemeinen zu erwartenden Werte von ϑ einen Überblick verschaffen will, ist es am besten, die charakteristischen Konstanten bewährten Ausführungen zu entnehmen. Die Firma Briegleb, Hansen & Co. in Gotha gestattete mir in sehr dankenswerter Weise die Benutzung der von ihr in zahlreichen Ausführungen erprobten Werte, auf Grund welcher ich die Werte von ϑ für zwei Fälle berechnet habe. Aufserdem habe ich $\alpha = 2$, entsprechend einem proportional mit der Umlaufzahl wachsenden Widerstandsmoment der angetriebenen Maschinen und $\varphi_0 = 3/4$, entsprechend 3/4 Beaufschlagung angenommen.

Fall 1. Turbine offen eingebaut in eine Wasserkammer, die zugleich als Wasserschlofs dient.

$$\sigma = 4 \text{ sec} \qquad \delta = 6\,\% \qquad \tau = 2 \text{ sec}$$
$$\vartheta = 0{,}55 \text{ sec.}$$

Fall 2. Mäfsig steile Rohrleitung zwischen Wasserschlofs und Turbinen.

$$\sigma = 4 \text{ sec} \qquad \delta = 9\,\% \qquad \tau = 3 \text{ sec}$$
$$\vartheta = 0{,}828 \text{ sec.}$$

Selbst für extreme Fälle, wo eine ziemlich lange Rohrleitung zwischen Wasserschlofs und Turbinen vorhanden ist, wird man etwa annehmen dürfen:

$$\sigma = 10 \text{ sec} \qquad \delta = 15\,\% \qquad \tau = 10 \text{ sec}$$

daraus

$$\vartheta = 3{,}4 \text{ sec.}$$

Man sieht aus diesen Werten, dafs das Nacheilen der Regler den Charakter der Schwingungsbewegungen in der Regel nicht wird beeinflussen können. Der Wert von $\cos q\,\vartheta$ in Gleichung 57) wird,

wenn man für ϑ den extremen Wert von 3,4 sec und als Schwingungsdauer 100 sec annimmt, gleich 0,98, also fast gleich 1.

Dabei sind jedoch zwei besondere Fälle auszunehmen. Der Wert von α kann nämlich viel gröfser als 2 werden, wenn die Turbinen mit anderen Kraftmaschinen zusammen auf dieselbe Welle arbeiten, oder wenn sie elektrische Generatoren antreiben, welche mit anderen, von unabhängigen Kraftmaschinen betriebenen Generatoren parallel geschaltet werden. In solchen Fällen würde schon eine geringe Erhöhung der Umlaufzahl genügen, um die anderen Kraftmaschinen zu entlasten und die Turbinen mit der vollen, vom Netz abzugebenden Leistung zu belasten. Die Verhältnisse werden dann sehr verwickelt und namentlich abhängig von den Reglern der übrigen Kraftmaschinen.

Ferner kann man die Halbierungszeit σ der nachgiebigen Rückführung durch Änderungen an der Ölbremse usw. auch gröfser machen als oben angenommen wurde; die Ergebnisse dieses Abschnittes zeigen jedoch, dafs man sie schon sehr viel gröfser machen mufs, wenn man eine merkliche Wirkung erzielen will; für die allgemeine Brauchbarkeit der Regelung wäre dies jedoch sehr nachteilig. Im übrigen würde dann auch die oben gegebene Ableitung des Wertes von ϑ nicht mehr genügend genau gelten: es war bei ihr angenommen worden, dafs sich am Regler ein Beharrungszustand ausbildet, und dies ist genügend genau nur dann der Fall, wenn σ klein ist im Verhältnis zur Dauer einer Schwingung.

13. Verbesserung der Ergebnisse wegen der bleibenden Ungleichförmigkeit der Regelung.

Bei den Entwicklungen des vorigen Abschnittes war angenommen worden, dafs der Turbinenregler mit nachgiebiger Rückführung ausgerüstet sei, so dafs er die Turbine, wenn Belastung und Gefälle stationär sind, stets mit derselben Umlaufzahl laufen läfst. Manche Turbinenregler sind jedoch mit starrer Rückführung versehen und verleihen den Turbinen eine bleibende Ungleichförmigkeit, und anderseits sind auch die meisten der mit nachgiebiger Rückführung ausgestatteten Turbinenregler noch mit einer besonderen Vorrichtung versehen, welche eine kleine bleibende Ungleichförmigkeit einzustellen gestattet, was für gewisse Betriebsverhältnisse notwendig ist. Im ersten Falle beträgt die bleibende Ungleichförmigkeit — im

folgenden δ_b genannt — meist etwa 5%, im letzten Falle 1—2%. Im folgenden soll der Einfluss einer bleibenden Ungleichförmigkeit auf den Verlauf der Schwingungsbewegung untersucht werden.

Es sei im Beharrungszustande das Gefälle gleich H_n die Leistung der Turbine N_o entsprechend der Konstanten A_o (vgl. Gleichung 2, Seite 8), die zugehörige Eröffnung der Turbine sei φ_o und die Umlaufzahl n_o. Dann ist bei einer anderen Turbinenöffnung die Umlaufzahl gleich

$$n = n_o \left(1 + \frac{\delta_b}{100} (\varphi_o - \varphi)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 65)$$

Die zur Umlaufzahl n gehörige Turbinenleistung kann wie früher gesetzt werden

$$N = N_o \left(1 + \frac{n - n_o}{n_o}\right)^\alpha$$

und dementsprechend ist bei der Umlaufzahl n der Wert A, der, durch das wirksame Gefälle dividiert, die von der Turbine verbrauchte Wassermenge ergibt:

$$A = A_0 \left(1 + \frac{n - n_0}{n_0}\right)^\alpha$$

Wenn man den Wert von n aus Gleichung 65) einsetzt, erhält man daraus für kleine Werte von $\frac{n - n_0}{n}$

$$A = A_0 \left(1 + \frac{\alpha\, \delta_b}{100} (\varphi_0 - \varphi)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 66)$$

Das wirksame Gefälle zu einer beliebigen Zeit kann ferner wie früher dargestellt werden durch

$$H = H_y - y \qquad H_n - s,$$

wobei für das folgende noch vorausgesetzt wird, dass es sich nur um eine kleine Gleichgewichtsstörung handelt, dass also s klein ist im Verhältnis zu H_n. Dann gilt, da N und N_0 sich nur wenig voneinander unterscheiden[1]), die Gleichung

[1]) Anmerkung. Davon, dass es zulässig ist, diesen Unterschied zu vernachlässigen, überzeugt man sich am besten dadurch, dass man die Rechnung ohne die Vernachlässigung durchführt. Man erhält dann folgende Gleichungen:

$$H^{3/2} \varphi = H_n^{3/2} \varphi_0 \frac{A_0}{A}$$

$$(H_n - s)^{3/2} \varphi = H_n^{3/2} \varphi_0 \frac{A_0}{A}$$

$$\varphi = \varphi_0 \left(1 + 3/2 \frac{s}{H_n}\right) \frac{A}{A_0}.$$

In Gleichung 66) eingesetzt:

$$H^{3/2}\,\varphi = H_n^{3/2}\,\varphi_0$$

oder

$$(H_n - s)^{3/2}\,\varphi = H_n^{3/2}\,\varphi_0.$$

Hieraus findet man bis auf Gröfsen höherer Ordnung genau

$$\varphi = \varphi_0 \left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{s}{H_n}\right).$$

Indem man diesen Wert für φ in die Gleichung 66) einführt, erhält man

$$A = A_0 \left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}\,\frac{s}{H_n}\right).$$

Die von der Turbine sekundlich verbrauchte Wassermenge ist somit

$$Q_r = \frac{A_0}{H_n - s}\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}\,\frac{s}{H_n}\right). \quad . \quad . \quad . \quad 67)$$

Um die Bewegungserscheinungen für den vorliegenden Fall zu ermitteln, hätte man diese Gleichung an Stelle der früher verwendeten Gleichung 3) $Q_r = \frac{A}{H_n - s}$ zu setzen, neue Grundgleichungen aufzustellen und alle Ableitungen zu wiederholen.

Man kann sich jedoch diese Mühe ersparen, wenn man beachtet, dafs bei der Aufstellung der Grundgleichungen die Gleichung 3)

$$A = A_0 \left(1 + \frac{\alpha\,\delta_b}{100}\left(\varphi - \varphi_0\,(1 + 3/2\,\frac{s}{H_n})\right)\right)\frac{A}{A_0}$$

oder

$$A = A_0 + A_0\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100} - \frac{A\,\alpha\,\delta\,\varphi_0}{100} - \frac{A\,\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}\,\frac{3}{2}\,\frac{s}{H_n}$$

Um zum Vergleich mit der anderen Berechnung in dem Ausdruck für $A\,s$ im Zähler zu behalten, setzt man für kleine s:

$$A = A_0 + s\left(\frac{d\,A}{ds}\right)_{s=0}.$$

Aus der vorigen Gleichung erhält man durch Differentiation (für $s = 0$):

$$\frac{d\,A}{ds} = -\frac{A_0\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}\,\frac{3}{2\,H_n}}{1 + \frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}}.$$

Daher wird

$$A = A_0\left(1 - \frac{\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}\,\frac{3}{2\,H_n}}{1 + \frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}}\cdot s\right).$$

Aus dem Vergleich mit der entsprechenden Gleichung im Text (Seite 54) sieht man, dafs die Abweichung sehr gering ist. Für die späteren Beispiele (Seite 56) würde man z. B. folgende Werte erhalten:

1) $\delta_b = 1^1/_2{}^0/_0$, $\alpha = 2$, $\varphi_0 = 3/4$:
1,033 statt wie dort 1,034
2) $\delta_b = 5^0/_0$, $\alpha = 2$, $\varphi_0 = 3/4$:
1,105 statt wie dort 1,113.

nur zweimal verwendet wurde: einmal wurde bei der Bildung der Gleichung 7) die Gröfse $\frac{d\,Q_r}{dt}$ gebildet, und ferner wurde zur Bildung der Gleichung 8) der Wert Q_r selbst verwendet. Wenn man daher ein reduziertes Gefälle $H_{n\,red}$ und eine reduzierte Konstante A_{red} derart bestimmt, dafs für kleine Werte von s (vgl. Gleichung 67)

$$Q_r = \frac{A_0}{H_n - s}\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}\,\frac{s}{H_n}\right) = \frac{A_{red}}{H_{n\,red} - s} \quad . \quad . \quad 68)$$

und

$$\frac{d\,Q_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{A_0}{H_n - s}\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}\,\frac{s}{H_n}\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{A_{red}}{H_{n\,red} - s}\right] \quad 69)$$

wird, so kann man die früheren Ergebnisse auf den vorliegenden Fall anwenden, wenn man in die Gleichungen statt A und H_n die Werte A_{red} und $H_{n\,red}$ einsetzt.

Die Gleichung 69) kann auch geschrieben werden

$$\frac{d\,Q_r}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds}\left[\frac{A_0}{H_n - s}\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}\,\frac{s}{H_n}\right)\right]\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{A_{red}}{H_{nred} - s}\right]\frac{ds}{dt} \quad 70)$$

Die beiden Gleichungen 68) und 70) zusammen ermöglichen die Bestimmung von A_{red} und H_{nred}; man erhält

$$A_{red} = A_0\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}\right)$$

$$H_{nred} = H_n\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}\right)$$

oder im Gesamtgefälle ausgedrückt

$$(H_{gred} - r) = (H_g - r)\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}\right).$$

Die Stabilitätsbedingung (Gleichung 17) erhält somit für den vorliegenden Fall folgende Form

$$\frac{2\,g\,k\,F\,H_n}{L\,f}\left(1 + \frac{3}{2}\,\alpha\,\frac{\delta_b}{100}\,\varphi_0\right) > 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 71)$$

Man sieht daraus, dafs die Stabilität durch die bleibende Ungleichförmigkeit im Verhältnis $1 : 1 + \frac{3}{2}\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100}$ verbessert wird. Um über die Gröfse dieses Einflusses ein Urteil zu gewinnen, habe ich zwei Beispiele berechnet; für das erste Beispiel wurde ein Turbinenregler mit nachgiebiger Rückführung angenommen, dem nur wegen besonderer Betriebsverhältnisse eine bleibende Ungleichförmigkeit von $1\,^1/_2\,\%$ verliehen wurde; dem zweiten Beispiel wurde ein Regler mit starrer Rückführung und $\delta_b = 5\,\%$ zugrunde gelegt. Ferner

wurde für beide Beispiele wie früher $\alpha = 2$ und $\varphi_0 = 3/4$ angenommen.

1. $\delta_b = 1\,1/2\,\%$,

daraus die Verbesserung der Stabilität:

$$1 + \frac{3}{2}\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100} = 1{,}034.$$

2. $\delta_b = 5\,\%$

$$1 + \frac{3}{2}\,\frac{\alpha\,\delta_b\,\varphi_0}{100} = 1{,}113.$$

Man erkennt, dafs selbst die grofse bleibende Ungleichförmigkeit des Reglers mit starrer Rückführung die Stabilität nur um etwa 11 % verbessert, so dafs es in der Regel genügen wird, die bleibende Ungleichförmigkeit überhaupt zu vernachlässigen.

Auf zwei Ausnahmen davon mufs allerdings auch hier hingewiesen werden: die erste betrifft die bereits im vorigen Abschnitte (S. 52) erörterte Möglichkeit, dafs α wesentlich gröfser als zwei wird, die zweite den Fall, dafs die bleibende Ungleichförmigkeit δ_b durch Veränderungen am Regler abnormal grofs gemacht wird, etwa um die sonst auftretenden Schwingungen zu vermeiden. Eine grofse bleibende Ungleichförmigkeit hat jedoch so schwerwiegende andere Nachteile, dafs sie kaum jemals wird angewendet werden können.

Das Ergebnis dieses Abschnittes und des vorigen kann somit kurz in den Satz zusammengefafst werden, dafs es im allgemeinen nicht möglich ist, durch besondere Einstellung oder Bauart der Turbinenregler die Schwingungen im Stollen und Wasserschlofs wirksam zu dämpfen ohne die Güte der Regelung wesentlich zu beeinträchtigen.

---

14. Verbesserung der Ergebnisse wegen der Veränderlichkeit des Gesamtwirkungsgrades.

Bisher wurde vorausgesetzt, dafs der Gesamtwirkungsgrad von Turbine und Rohrleitung zusammen bei Änderungen des Gefälles unveränderlich sei; im folgenden soll noch dargelegt werden, wie man die in Wirklichkeit stets vorhandene Veränderlichkeit berücksichtigen kann.

Zunächst mufs man ermitteln, wie sich der Gesamtwirkungsgrad bei unveränderlicher Turbinenleistung und veränderlichem Gefälle zwischen Wasserschlofs und Unterwasser ändert. Dazu mufs man im Besitze eines vollständigen Bremsberichtes der Turbine sein, aus dem man ihren Wirkungsgrad für alle Leitradöffnungen, Umlaufzahlen und für alle an der Turbine wirksamen Gefälle entnehmen kann. Ferner mufs man noch den Reibungsverlust in der Rohrleitung zwischen Wasserschlofs und Turbine berechnen auf Grund eines angenommenen Rauhigkeitskoeffizienten für die Rohrwandungen. Man kann dann ohne besondere Schwierigkeiten für die gegebene Turbinenleistung und verschiedene Gefälle den Gesamtwirkungsgrad ermitteln; zweckmäfsigerweise werden die Resultate graphisch durch eine Kurve dargestellt, indem man etwa als Abszissen die Gefälle Wasserschlofs-Unterwasser und als Ordinaten die Wirkungsgrade abträgt und die einzelnen Punkte durch eine Kurve verbindet, wie dies in Fig. 8 geschehen ist. Der Wirkungsgrad bei dem Gefälle, welches dem betreffenden Beharrungszustande entspricht, möge mit η_0 bezeichnet werden; wenn man sich dann auf die Betrachtung kleiner Gleichgewichtsstörungen beschränkt, kann man die Wirkungsgradkurve durch ihre Tangente im Punkte H_n, η_0 ersetzen und etwa schreiben

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon s,$$

wobei der Wert von ε unter Berücksichtigung der Mafsstäbe aus der Neigung der Tangente gefunden werden kann. Für die von den Turbinen verbrauchte Wassermenge gilt dann die Gleichung

$$Q_r = \frac{A}{H_n - s}\,\frac{\eta_0}{\eta} = \frac{A}{H_n - s}\,\frac{\eta_0}{\eta_0 + \varepsilon s}$$

oder

$$Q_r = \frac{A}{(H_n - s)\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{\eta_0}\, s\right)}.$$

Um die nochmalige Ableitung aller Gleichungen zu ersparen, kann man ähnlich wie im vorigen Abschnitt verfahren, indem man ein reduziertes Gefälle $H_{n\,red}$ und eine reduzierte Konstante A_{red} derart bestimmt, dafs für $s = 0$ die beiden Bedingungen

$$\frac{A_{red}}{H_{n\,red} - s} = \frac{A}{(H_n - s)\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{\eta_0}\, s\right)}$$

und

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{A_{red}}{H_{n\,red}-s}\right]=\frac{d}{ds}\left[\frac{A}{(H_n-s)\left(1+\frac{\varepsilon}{\eta_0}s\right)}\right]$$

erfüllt sind.

Eine einfache Rechnung ergibt, dafs dazu

$$H_{n\,red}=\frac{H_n}{1-\frac{\varepsilon}{\eta_0}H_n}$$

$$A_{red}=\frac{A}{1-\frac{\varepsilon}{\eta_0}H_n}$$

gemacht werden mufs.

Die Stabilitätsbedingung (Gleichung 17) kann daher für diesen Fall folgendermafsen geschrieben werden:

$$\frac{2gkfH_{n\,red}}{Lf}>1$$

oder, indem man den Wert von $H_{n\,red}$ einsetzt:

$$\frac{2gkfH_n}{Lf\left(1-\frac{\varepsilon}{\eta_0}H_n\right)}>1.$$

Wenn ε positiv ist, d. h. wenn bei abnehmendem Gefälle der Wirkungsgrad bei konstant gehaltener Turbinenleistung besser wird, ist das reduzierte Gefälle gröfser als das wirkliche und die Stabilität wird entsprechend der Stabilitätsbedingung Gleichung 17) besser als bei unveränderlichem Wirkungsgrade. Das Umgekehrte ist bei einer entgegengesetzter Veränderlichkeit des Wirkungsgrades der Fall.

Ich habe einige Wirkungsgradkurven berechnet, und zwar für eine J-Turbine von Briegleb, Hansen u. Co. in Gotha, für welche ein vollständiger Bremsbericht im »Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft« (Jahrgang 1910, S. 176) veröffentlicht worden ist. Es wurde ein zwischen den Grenzen von ca. 70 bis 110 m veränderliches Gefälle (Turbinenanlage an einer Talsperre), eine Umlaufzahl der Turbinen von 850 pro Min. und ein Laufraddurchmesser von 610 mm angenommen. Ferner wurde angenommen, dafs zwischen dem Wasserschlofs und der aus drei solchen Turbinen bestehenden Kraftanlage sich eine Rohrleitung von 270 m Länge bei einem Durchmesser von 1,5 m befindet; der Rauhigkeitskoeffizient der Rohrwandung (nach der Definition auf Seite 13) wurde zu 0,018 angenommen und demgemäfs der Druckverlust aus der Formel

$$h_w = \frac{270}{1{,}5} \frac{c^2}{2g} \cdot 0{,}018$$

berechnet.

Fig. 8 zeigt die berechneten Gesamtwirkungsgrade von Turbinen und Rohrleitung für den Fall, dafs alle drei Turbinen im Betriebe sind und mit je 930, 1550 und 1860 PS belastet werden. Es ergibt sich beispielsweise für $H_n = 80$ m

bei einer Belastung pro Turbine von	der Wert von ε zu	dementsprechend wird die Stabilität
930 PS	+ 0,003	verbessert im Verhältnis 1:1,43
1550 PS	— 0,002	verschlechtert im Verhältnis 1:1,195
1860	— 0,0046	verschlechtert im Verhältnis 1 : 1,45.

Die entsprechenden Zahlen für andere Nutzgefälle lassen sich leicht aus dem Verlaufe der Kurven ablesen.

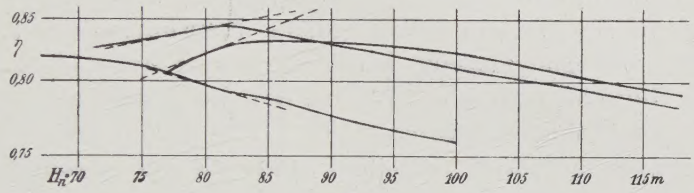

Fig. 8.

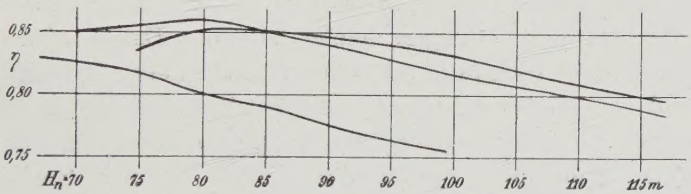

Fig. 9.

In Fig. 9 sind noch die Wirkungsgradkurven für denselben Fall gezeichnet, jedoch unter Vernachlässigung der Reibungsverluste in der Rohrleitung. Aus der veränderten Lage der Kurven erkennt man, dafs diese Reibungsverluste in Wirklichkeit wesentlich mitspielen, und ersieht zugleich, welche Verbesserung der Stabilität man von einer Vergröfserung des Rohrleitungsdurchmessers noch erhoffen kann.

Das gewählte Beispiel ist insofern ein für die Praxis ungünstiger Fall, als bei ihm für die Wahl der Umlaufzahl und Turbinengröfse sehr verschiedene Gefälle berücksichtigt werden mufsten. Bei Anlagen mit nur schwach veränderlichem Gefälle wird man für den kleinen Bereich der in Betracht kommenden Gefälle einen

wesentlich flacheren Verlauf der Wirkungsgradkurven unschwer erzielen können. Immerhin dürfte es sich auch bei solchen Anlagen empfehlen, den Einfluſs der Veränderlichkeit des Wirkungsgrades nachzuprüfen.

Zusammenfassung.

Es werden die Hauptgleichungen für die Wasserbewegung im Stollen und Wasserschloſs aufgestellt unter der Annahme, daſs die Turbinen unter der Einwirkung selbsttätiger Regler stehen, und daſs die von den Turbinen abzugebende Leistung, welche eine beliebige zeitliche Veränderlichkeit aufweisen kann, gegeben ist. Für den wichtigsten Fall, daſs die abzugebende Leistung konstant ist, werden die Gleichungen für unendlich kleine Schwingungen um einen stationären Bewegungszustand herum nach zwei Methoden integriert, und mit Hilfe des Integrals wird eine Beziehung zwischen den Konstanten des Problems bestimmt, die erfüllt sein muſs, damit die Schwingungen gedämpft verlaufen. Daſs die für unendlich kleine Schwingungen ermittelten Beziehungen annähernd auch für groſse Schwingungen gelten, wird durch stufenweise näherungsweise Integration der Hauptgleichungen nachgewiesen. Dabei wird ein für diese stufenweise Integration besonders geeignetes Verfahren dargelegt und auf seine Genauigkeit untersucht. Schlieſslich wird noch nachgewiesen, daſs die wichtigsten, bei der Aufstellung der Hauptgleichungen gemachten Vernachlässigungen in der Regel nichts ausmachen, und ermittelt, welche Verbesserungen zur Berücksichtigung dieser Vernachlässigungen an den früheren Ergebnissen anzubringen sind.